II APPELLO di
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2022/2023, 17 Febbraio 2023
Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{5n+3}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{5n+3} = \frac{1}{(5n+3)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{10\, n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \Rightarrow$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente perchè $\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{5n+3}\right|$ si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ che è convergente.
- $\left\{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{5n+3}\right\}_n$ è decrescente $\left(f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{5x+3},\ f'(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(5x+3+10\sqrt{x(x+1)})}{2\sqrt{x(x+1)}\,(5x+3)^2} < 0\right.$ definitivamente per $\left.x\to+\infty\right)$ e infinitesima $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{5n+3}$ converge semplicemente per criterio di Leibnitz.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 1 + 2x^\alpha}{1+\sqrt{\sinh(x^\alpha)}-\exp(x^2)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$\cos x - 1 + 2x^\alpha = \begin{cases} 2x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 2 \\ -\frac{x^2}{2} + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

e di:

$$1+\sqrt{\sinh(x^\alpha)}-\exp(x^2) = \begin{cases} \frac{e^{\left(\frac{x^\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{2}} & \text{se } \alpha < 0 \\ \sqrt{\operatorname{senh}(1)} & \text{se } \alpha = 0 \\ x^{(\alpha/2)} + o(x^{(\alpha/2)}) & \text{se } 0 < \alpha < 4 \\ -\frac{x^4}{2} + o(x^4) & \text{se } \alpha = 4 \\ -x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$$\cos x - 1 + 2x^\alpha = -\frac{x^2}{2} + 2x^\alpha + o(x^2)$$

$$1+\sqrt{\operatorname{senh}(x^\alpha)} - e^{(x^2)} = [\text{se } \alpha > 0] = \underbrace{x^{\alpha/2} + o(x^{2\alpha})}_{= \sqrt{x^\alpha + \frac{x^{3\alpha}}{6} + o(x^{3\alpha})}} - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$1+\sqrt{\operatorname{senh}(x^\alpha)} - e^{(x^2)} = [\text{se } \alpha = 0] = \sqrt{\operatorname{senh}(1)} + o(1)$$

$$1+\sqrt{\operatorname{senh}(x^\alpha)} - e^{(x^2)} = [\text{se } \alpha < 0] = \sqrt{\frac{e^{(x^\alpha)}}{2} + o(e^{(x^\alpha)})} + o(x) = \frac{e^{\left(\frac{x^\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{2}} + o\left(e^{\left(\frac{x^\alpha}{2}\right)}\right)$$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{\operatorname{senh}(1)}} & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha = 4 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\dfrac{4}{x} - |x-3|\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $x=0$ è punto di discontinuità di salto

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{y\to -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale bilatero

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{-\frac{4}{x^2} - \operatorname{sgn}(x-3)}{1 + \left(\frac{4}{x} - |x+3|\right)^2}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$f'(x) \geq 0 \iff \frac{4}{x^2} + \operatorname{sgn}(x-3) \leq 0 \iff 4 + x^2 \operatorname{sgn}(x-3) \leq 0 \Rightarrow$

$\{f' \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [2, 3[\Rightarrow$

f è monotona crescente su $]-\infty, -2]$ e su $[2, 3]$

f è monotona decrescente su $[-2, 0[$, su $]0, 2]$ e su $[3, +\infty[$

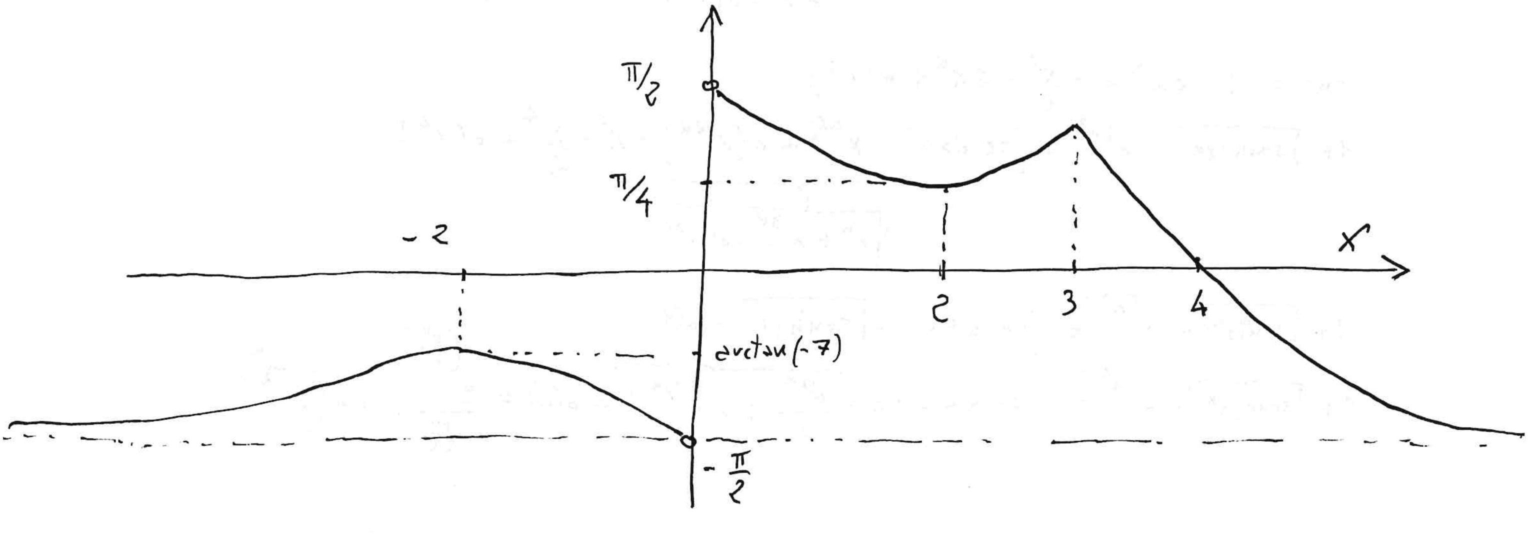
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- Punto di minimo relativo: $x = 2$, $f(2) = \frac{\pi}{4}$
- Punti di massimo relativo: $x = -2$, $f(-2) = \arctan(-7)$, $x = 3$, $f(3) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

$\nexists$ punti di massimo o di minimo assoluto

(v) Determinare l'immagine di f: $\mathrm{Im}(f) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha (1-x)^{2\alpha}}{\left(\ln|2x-1|\right)^3}\,dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha (1-x)^{2\alpha}}{(\ln|2x-1|)^3}\,dx = I_1 + I_2,\quad I_1 = \int_0^{1/2} \frac{x^\alpha (1-x)^{2\alpha}}{(\ln|2x-1|)^3}\,dx,\quad I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{x^\alpha (1-x)^{2\alpha}}{(\ln|2x-1|)^3}\,dx$$

i) $I_1 \sim \int_0^{1/2} \frac{x^\alpha}{-8x^3}\,dx$ convergente $\iff 3-\alpha < 1 \iff \alpha > 2$

$\Rightarrow I_1$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > 2 \\ \text{divergente a } -\infty \ \forall \alpha \leq 2 \end{cases}$

ii) $I_2 \sim \int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^{2\alpha}}{(\ln[1+2(x-1)])^3}\,dx \sim \int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^{2\alpha}}{8\,(x-1)^3}\,dx = -\int_{1/2}^1 \frac{dx}{8(1-x)^{(3-2\alpha)}}$ convergente $\iff 3-2\alpha < 1$ $\iff \alpha > 1$

$\Rightarrow I_2$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > 1 \\ \text{divergente a } -\infty \ \forall \alpha \leq 1 \end{cases}$

i) e ii) $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^\alpha (1-x)^{2\alpha}}{(\ln|2x-1|)^3}\,dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > 2 \\ \text{divergente a } -\infty \ \forall \alpha \leq 2 \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = x\left(\frac{2y}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} - \ln(1+x^2)\right). \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata a (1):

$$\varphi_c(x) = c\, e^{\int \frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}dx} = c\, e^{\ln(\ln(1+x^2))} = c\ln(1+x^2),\quad c \in \mathbb{R}$$

- Integrale generale di (1):

$$\varphi_c(x) = \ln(1+x^2)\left[c + \int \frac{-x\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)}\,dx\right] = \ln(1+x^2)\left[c - \frac{x^2}{2}\right],\quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = x\left(\frac{2y}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} - \ln(1+x^2)\right), \\ y(\sqrt{e-1}) = \frac{e}{2} \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\frac{e}{2} = \varphi_c(\sqrt{e-1}) = \ln(1+e-1)\left[c - \frac{e-1}{2}\right] = c - \frac{e-1}{2} \Rightarrow c + \frac{1}{2} = e \Rightarrow c = e - \frac{1}{2}$$

$$\varphi(x) = \ln(1+x^2)\left(e - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

$$\phi(c_1, c_2; x) = e^x \cdot (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' + 2y = 2\,e^x \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K e^x$

$\Psi'(x) = \Psi''(x) = K e^x$, $\Psi''(x) - 2\Psi'(x) + 2\Psi(x) =$

$= e^x (K - 2K + 2K) = K e^x$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K = 2$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = 2e^x$

$$\psi(c_1, c_2; x) = \Psi(x) + \phi(c_1, c_2; x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 2\,e^x, \\ y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\psi'(c_1, c_2; x) = e^x ((c_1 + c_2)\cos x + (c_2 - c_1)\operatorname{sen} x + 2)$

$-1 = \psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + 2 \Rightarrow c_1 = -3$, $1 = \psi'(c_1, c_2, 0) = c_1 + c_2 + 2 = c_2 - 1$

$\Rightarrow c_2 = 2$

$$\psi(x) = e^x (-3\cos x + 2\operatorname{sen} x + 2)$$