II APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2022/2023, 17 Febbraio 2023

Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}\,(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ la serie diverge assolutamente perché $\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\right|$ si comporta come la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ che è divergente
- $\left\{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\right\}_n$ è decrescente $\left(f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}},\ f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(2x+1-2\sqrt{x(x+1)})}{2\sqrt{x(x+1)(2x+1)}} < 0\right.$ definitivamente per $\left.x \to +\infty\right)$ e infinitesima $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ converge semplicemente per criterio di Leibnitz per serie a termini di segno alterno.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{\cos\left(\exp(\sqrt{2x})-1\right) + x^3(\ln x)^4 - 1 + (\sinh x)^2}{\cosh x - 1 + 3x^\alpha}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$\cos\left(\exp(\sqrt{2x})-1\right) + x^3(\ln x)^4 - 1 + (\sinh x)^2 = -x - \sqrt{2}\,x^{3/2} + o\left(x^{3/2}\right)$$

e di:

$$\cosh x - 1 + 3x^\alpha = \begin{cases} 3x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{7}{2}x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 2 \\ \frac{x^2}{2} + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

(fornendo le argomentazioni principali).

- $\cos(e^{\sqrt{2x}}-1) + x^3(\ln x)^4 - 1 + (\operatorname{senh} x)^2 = 1 - \frac{(e^{\sqrt{2x}}-1)^2}{2} + o((e^{\sqrt{2x}}-1)^3) + o(x^2) - 1 + x^2 + o(x^2)$
  $= 1 - \frac{(\sqrt{2x}+x+o(x))^2}{2} + o(x^{3/2}) + o(x^2) - 1 + x^2 = -x - \sqrt{2}\,x^{3/2} + o(x^{3/2})$

$\left[x^3(\ln x)^4 = x^2\underbrace{(x\cdot(\ln x)^4)}_{=o(1)}\right]$

- $\cosh x - 1 + 3x^\alpha = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 3x^\alpha - 1$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(|2-x| - \dfrac{1}{x}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $x=0$ è punto di discontinuità di salto

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{y\to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale bilatero

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sgn}(2-x) + \frac{1}{x^2}}{1 + \left(|2-x| - \frac{1}{x}\right)^2}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$f'(x) \geq 0 \iff -\operatorname{sgn}(2-x) + \frac{1}{x^2} \geq 0 \iff -x^2 \operatorname{sgn}(2-x) + 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\{f' \geq 0\} = [-1, 0[\cup]0, 1] \cup]2, +\infty[\Rightarrow$

f è monotona crescente su $[-1, 0[$, su $]0,1]$ e su $[2, +\infty[$

f è monotona decrescente su $]-\infty, -1]$ e su $[1, 2]$

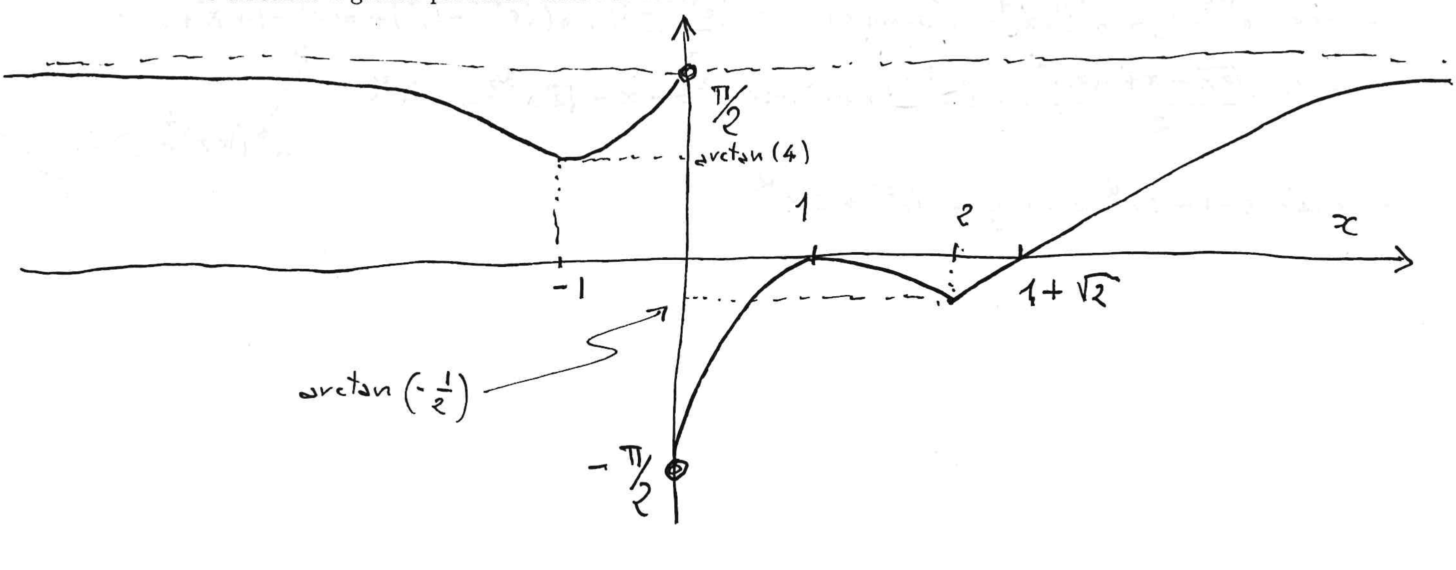
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- Punti di minimo relativo: $x = -1$, $f(-1) = \arctan(4)$, $x = 2$, $f(2) = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$
- Punto di massimo relativo: $x = 1$, $f(1) = 0$

$\nexists$ punti di minimo o massimo assoluto

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^{(2\alpha)}\,(1+x)^{\alpha}}{\left(\ln|2x+1|\right)^2}\,dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^{(2\alpha)}(1+x)^{\alpha}}{(\ln|2x+1|)^2}\,dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_{-1}^{-1/2} \frac{x^{(2\alpha)}(1+x)^{\alpha}}{(\ln|2x+1|)^2}\,dx, \quad I_2 = \int_{-1/2}^{0} \frac{x^{(2\alpha)}(1+x)^{\alpha}}{(\ln|2x+1|)^2}\,dx$$

$$i)\ I_1 \sim \int_{-1}^{-1/2} \frac{(1+x)^{\alpha}}{(\ln(-2x-1))^2}\,dx = \int_{-1}^{-1/2} \frac{(1+x)^{\alpha}}{(\ln(1-2(x+1)))^2}\,dx \sim \int_{-1}^{-1/2} \frac{(1+x)^{\alpha}}{4(x+1)^2}\,dx \sim \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{(x+1)^{2-\alpha}}\,dx$$

convergente $\iff 2-\alpha<1 \iff \alpha>1 \Rightarrow I_1$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha>1 \\ \text{divergente a } +\infty\ \forall \alpha\le 1 \end{cases}$

$$ii)\ I_2 \sim \int_{-1/2}^{0} \frac{x^{2\alpha}}{4x^2}\,dx \sim \int_{-1/2}^{0} \frac{1}{x^{(2-2\alpha)}}\,dx$$ convergente $\iff 2-2\alpha<1 \iff 2\alpha>1 \iff \alpha>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I_2$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha>\frac{1}{2} \\ \text{divergente a } +\infty\ \forall \alpha\le\frac{1}{2} \end{cases}$

i) e ii) $\Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^{(2\alpha)}(1+x)^{\alpha}}{(\ln|2x+1|)^2}\,dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha>1 \\ \text{divergente a } +\infty\ \forall \alpha\le 1 \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = x^2\left(\frac{3y}{(1+x^3)\ln(1+x^3)} - \ln(1+x^3)\right). \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata a (1):

$$\varphi_c(x) = c\,e^{\int \frac{3x^2}{(1+x^3)\ln(1+x^3)}dx} = c\,e^{\ln(\ln(1+x^3))} = c\ln(1+x^3), \quad c\in\mathbb{R}$$

- Integrale generale di (1):

$$\psi_c(x) = \ln(1+x^3)\left[c + \int \frac{-x^2\ln(1+x^3)}{\ln(1+x^3)}\,dx\right] = \ln(1+x^3)\left[c - \frac{x^3}{3}\right], \quad c\in\mathbb{R}$$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = x^2\left(\frac{3y}{(1+x^3)\ln(1+x^3)} - \ln(1+x^3)\right), \\ y(\sqrt[3]{e-1}) = \frac{1}{3} \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\frac{1}{3} = \psi_c(\sqrt[3]{e-1}) = \ln(1+e-1)\left[c - \frac{e-1}{3}\right] \Rightarrow c = \frac{e}{3}$$

$$\varphi(x) = \ln(1+x^3)\left(\frac{e-x^3}{3}\right)$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$

$$\phi(c_1, c_2; x) = e^x \left(c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x) \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' + 5y = 8\,e^x \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K e^x$

$\Psi'(x) = \Psi''(x) = K e^x$, $\Psi''(x) - 2\Psi'(x) + 5\Psi(x) =$

$= e^x (K - 2K + 5K) = 4 K e^x$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K = 2$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = 2e^x$

$$\psi(c_1, c_2; x) = \Psi(x) + \phi(c_1, c_2; x) = e^x \left(c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x) + 2 \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 8\,e^x\,, \\ y(0) = 3, \qquad y'(0) = -1\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = e^x \left((c_1 + 2c_2)\cos(2x) + (c_2 - 2c_1)\operatorname{sen}(2x) + 2 \right)$

$3 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + 2 \Rightarrow c_1 = 1$, $-1 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + 2c_2 + 2$

$= 2c_2 + 3 \Rightarrow$

$2c_2 = -4 \Rightarrow c_2 = -2$

$$\psi(x) = e^x \left(1 \cos(2x) - 2 \operatorname{sen}(2x) + 2 \right)$$