

**II APPELLO di
ANALISI MATEMATICA 1**
Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2022/2023, 17 Febbraio 2023
Tema 1

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4 punti] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{5n+3}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1 + 2x^\alpha}{1 + \sqrt{\sinh(x^\alpha)} - \exp(x^2)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \rightarrow 0$) di:

$$\cos x - 1 + 2x^\alpha =$$

e di:

$$1 + \sqrt{\sinh(x^\alpha)} - \exp(x^2) =$$

(fornendo le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$$\ell_\alpha =$$

ESERCIZIO 3. [7 *punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\frac{4}{x} - |x - 3|\right)$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- (v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$
e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha (1-x)^{2\alpha}}{(\ln|2x-1|)^3} dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 5. [5 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = x \left(\frac{2y}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} - \ln(1+x^2) \right). \quad (1)$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{y} = x \left(\frac{2y}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} - \ln(1+x^2) \right), \\ y(\sqrt{e-1}) = \frac{e}{2} \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6.

- (i) [2 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad (2)$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\phi(c_1, c_2; x) =$$

- (ii) [2.5 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \quad (3)$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(c_1, c_2; x) =$$

- (iii) [1.5 punti] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 2e^x, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(x) =$$