II APPELLO di
ANALISI MATEMATICA 1
Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2023/2024, 19 Febbraio 2024
Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(\frac{3^n+2\,n!}{7^n+(n+1)!}\right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- Convergenza assoluta: per gerarchia degli infiniti si ha: $\frac{3^n+2n!}{7^n+(n+1)!} = \frac{2n!+o(n!)}{(n+1)!+o((n+1)!)} \sim \frac{2n!}{(n+1)!} = \frac{2}{(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(\frac{3^n+2n!}{7^n+(n+1)!}\right)$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ che è una serie convergente poichè $4/3>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(\frac{3^n+2n!}{7^n+(n+1)!}\right)$ è assolutamente convergente e dunque anche semplicemente convergente.

ESERCIZIO 2. [*6 punti*] Studiare il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to0+}\frac{(1-\ln 4)\operatorname{sen}x+4^{(x+x^2)}-e^x+4^{(-\frac{1}{x})}}{x^3\ln x+(\alpha-4)x^2}$, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$. Determinare lo sviluppo asintotico (per $x\to0$) di:

$$(1-\ln 4)\operatorname{sen}x+4^{(x+x^2)}-e^x+4^{(-\frac{1}{x})} = \left(\ln 4+\frac{(\ln 4)^2-1}{2}\right)x^2+o(x^2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

- $(1-\ln 4)\operatorname{sen}x + 4^{(x+x^2)} - e^x = (1-\ln 4)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) + e^{((x+x^2)\ln 4)} - e^x =$
$= (1-\ln 4)x + o(x^2) + \ln 4\,(x+x^2) + \frac{1}{2}(\ln 4)^2x^2 + o(x^2) - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) =$
$= \ln 4\, x^2 + \frac{1}{2}(\ln 4)^2x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \left(\ln 4 + \frac{(\ln 4)^2-1}{2}\right)x^2 + o(x^2)$
- $4^{(-\frac{1}{x})} = e^{(-\frac{\ln 4}{x})} = o(x^n)$ per ogni n per $x\to0^+ \Rightarrow 4^{(-\frac{1}{x})} = o(x^2)$ per $x\to0^+$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln 4+\frac{(\ln 4)^2-1}{2}\right)x^2}{(\alpha-4)x^2} = \frac{\left(\ln 4+\frac{(\ln 4)^2-1}{2}\right)}{\alpha-4} & \text{se } \alpha\neq4 \\ \lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln 4+\frac{(\ln 4)^2-1}{2}\right)x^2}{x^3\ln x} = -\infty & \text{se } \alpha=4 \end{cases}$$

($\ln x<0$ per $x\to0^+$)

ESERCIZIO 3. [*8 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln|e^{2x} - e^2| - 2|x|$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\cdot \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty \Rightarrow x=1$ è asintoto verticale ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}(1-e^{2(1-x)})) - 2x$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(e^{2x}) + \ln(1-e^{2(1-x)}) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1-e^{2(1-x)}) = 0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale unilatero per $y \to +\infty$

$\cdot \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^2(1-e^{2(x-1)})) + 2x = \lim_{x\to-\infty} \left(2 + \ln(1-e^{2(x-1)}) + 2x\right) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\ln(1-e^{2(x-1)})+2x}{x} = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} \left(2+\ln(1-e^{2(x-1)})\right) = 2 \Rightarrow y = 2x+2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{\mathrm{sgn}(e^{2x}-2)}{|e^{2x}-e^2|} \cdot 2e^{2x} - 2\,\mathrm{sgn}(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-e^2} - 2\,\mathrm{sgn}(x)$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^2}{e^{2x}-e^2} & \text{se } x>0 \\ \dfrac{2(2e^{2x}-e^2)}{e^{2x}-e^2} & \text{se } x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x>0: e^{2(x-1)} - 1 > 0 \iff x>1 \\ x<0: 2e^{2x} - e^2 < 0 \quad \forall x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{f'(x) \geq 0\} =]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[\Rightarrow f$ è crescente su $]-\infty, 0]$ e su $]1,+\infty[$

f è decrescente su $[0, 1[$

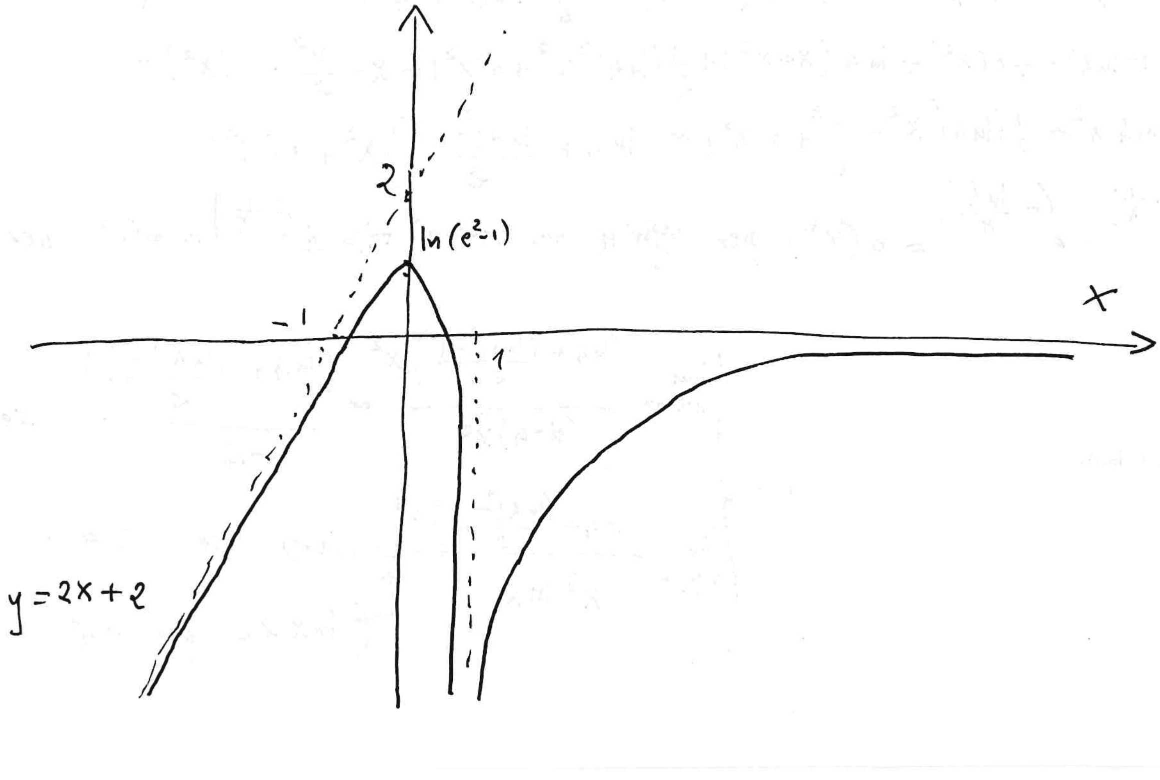
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x=0$ punto di massimo assoluto, $f(0) = \ln(e^2-1)$

$\nexists$ punti di minimo relativo o assoluto

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, \ln(e^2-1)]$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(\alpha-3)}}\right) dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(\alpha-3)}}\right) dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_2^{3} \frac{1}{\sqrt{x-2}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(\alpha-3)}}\right) dx, \quad I_2 = \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(\alpha-3)}}\right) dx$$

i) $I_1 \sim \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\, dx$ che è convergente $\Rightarrow$ I_1 è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) $I_2 \underset{\alpha \geq 3}{\sim} \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{x^{(\alpha-3)}}\, dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{(\alpha-5/2)}}\, dx$ che è convergente $\Leftrightarrow \alpha - \frac{5}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{7}{2}$

$I_2 \underset{\alpha < 3}{\sim} \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ che è divergente a $+\infty$ $\Rightarrow$ I_2 è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > \frac{7}{2} \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \leq \frac{7}{2} \end{cases}$

i) e ii) $\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(\alpha-3)}}\right) dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > \frac{7}{2} \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \leq \frac{7}{2} \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{y}{1+e^x} + e^x \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata ad (1):

$$\Psi_c(x) = c\, e^{\int \frac{dx}{1+e^x}} = c \cdot e^{\int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx} = c\, e^{(x - \ln(1+e^x))} = c\, \frac{e^x}{1+e^x}$$

- Integrale generale di (1):

$$\Psi_c(x) = \frac{e^x}{1+e^x}\left[c + \int \frac{1+e^x}{e^x} \cdot e^x\, dx\right] = \frac{e^x}{1+e^x}\left[c + \int 1 + e^x\, dx\right] = \frac{e^x}{1+e^x}\left[c + x + e^x\right]$$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{y}{1+e^x} + e^x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$$1 = \Psi_c(0) = \frac{1}{2}\left[c + 1\right] \Rightarrow c + 1 = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{1+e^x}\left(1 + x + e^x\right)$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + y' = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico: $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 0, -1$

$\phi(c_1, c_2; x) = c_1 + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + y' = \text{sen}(2x) \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K_1 \cos(2x) + K_2 \,\text{sen}(2x)$

$\Psi'(x) = -2K_1 \,\text{sen}(2x) + 2K_2 \cos(2x), \quad \Psi''(x) = -4K_1 \cos(2x) - 4K_2 \,\text{sen}(2x)$

$\Psi''(x) + \Psi'(x) = -4K_1 \cos(2x) - 4K_2 \,\text{sen}(2x)$
$+ 2K_2 \cos(2x) - 2K_1 \,\text{sen}(2x) = (2K_2 - 4K_1)\cos(2x) + (-2K_1 - 4K_2)\,\text{sen}(2x)$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} K_2 - 2K_1 = 0 \\ K_1 + 2K_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_2 = 2K_1 \\ 5K_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow K_1 = -\frac{1}{10}, K_2 = -\frac{1}{5} \Rightarrow \Psi(x) = -\frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{5}\,\text{sen}(2x)$

$\psi(c_1, c_2; x) = -\frac{1}{5}\left(\frac{\cos(2x)}{2} + \text{sen}(2x)\right) + c_1 + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = \text{sen}(2x)\,, \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = -\frac{2}{5}\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(x; c_1, c_2) = -\frac{1}{5}\left(2\cos(2x) - \text{sen}(2x)\right) - c_2 e^{-x}$

$\left.\begin{array}{l} 0 = \Psi(0; c_1, c_2) = -\frac{1}{10} + c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{10} + c_2 \\ -\frac{2}{5} = \Psi'(0; c_1, c_2) = -\frac{2}{5} - c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{10}$

$\psi(x) = -\frac{1}{5}\left(\frac{\cos(2x)}{2} + \text{sen}(2x)\right) + \frac{1}{10}$