II APPELLO di
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2023/2024, 19 Febbraio 2024

Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{5^n+3\,n!}{3^n+5\,n!}\right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- Convergenza assoluta: per gerarchia degli infiniti si ha: $\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{5^n+3n!}{3^n+5n!}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{3n!+o(n!)}{5n!+o(n!)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{5^n+3n!}{3^n+5n!}\right)$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ che è divergente a $+\infty$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{5^n+3n!}{3^n+5n!}\right)$ non è assolutamente convergente
- $\lim_n \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{5^n+3n!}{3^n+5n!}\right) = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\left\{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{5^n+3n!}{3^n+5n!}\right)\right\}_n$ è decrescente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{5^n+3n!}{3^n+5n!}\right)$ è semplicemente convergente per Criterio di Leibnitz per serie a termini di segno alterno.

ESERCIZIO 2. [*6 punti*] Studiare il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \dfrac{3^{(x+x^2)} - e^x + (1-\ln 3)\,\mathrm{sen}x + 3^{(-\frac{1}{x})}}{(3-\alpha)x^2 - x^3\ln x}$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$3^{(x+x^2)} - e^x + (1-\ln 3)\,\mathrm{sen}x + 3^{(-\frac{1}{x})} = \left(\ln 3 + \frac{(\ln 3)^2 - 1}{2}\right)x^2 + o(x^2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

- $3^{(x+x^2)} - e^x + (1-\ln 3)\,\mathrm{sen}\,x = e^{((x+x^2)\ln 3)} - e^x + (1-\ln 3)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)\right) =$
$= 1 + \ln 3\,(x+x^2) + \frac{(\ln 3)^2}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + (1-\ln 3)x + o(x^2) =$
$= \ln 3\, x^2 + \frac{(\ln 3)^2}{2}x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \left(\ln 3 + \frac{(\ln 3)^2 - 1}{2}\right)x^2 + o(x^2)$
- $3^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{\left(-\frac{\ln 3}{x}\right)} = o(x^n)$ per ogni n per $x\to 0^+$ $\Rightarrow 3^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = o(x^2)$ per $x \to 0^+$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\left(\ln 3 + \frac{(\ln 3)^2-1}{2}\right)x^2}{(3-\alpha)x^2} = \dfrac{\left(\ln 3 + \frac{(\ln 3)^2-1}{2}\right)}{(3-\alpha)} & \text{se } \alpha \neq 3 \\[2ex] \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\left(\ln 3 + \frac{(\ln 3)^2-1}{2}\right)x^2}{-x^3\ln x} = +\infty & \text{se } \alpha = 3 \end{cases}$$

$\uparrow$ ($\ln x < 0$ per $x \to 0^+$)

ESERCIZIO 3. [*8 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = 3|x| - \ln|e^3 - e^{3x}|$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

• $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ è asintoto verticale; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x - \ln(e^{3x}(1-e^{3(1-x)})) =$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(3x - \ln(e^{3x}) - \ln(1-e^{3(1-x)})\right) = \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1-e^{3(1-x)}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale unilatero per $y \to +\infty$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -3x - \ln(e^3(1-e^{3(x-1)})) = \lim_{x\to-\infty}\left(-3x-3-\ln(1-e^{3(x-1)})\right) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x-3-\ln(1-e^{3(x-1)})}{x} = -3$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)+3x = \lim_{x\to-\infty}\left(-3-\ln(1-e^{3(x-1)})\right) = -3$

$\Rightarrow y = -3x-3$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = 3\,\mathrm{sgn}(x) + \frac{3e^{3x}}{e^3 - e^{3x}} = \begin{cases} \frac{3e^3}{e^3-e^{3x}} & \text{se } x>0 \\ \frac{3(2e^{3x}-e^3)}{e^3-e^{3x}} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x>0 : & 1-e^{3(x-1)} > 0 \iff x<1 \\ x<0 : & 2e^{3(x-1)} - 1 > 0 \quad \text{mai soddisfatta} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{f' \geq 0\} =]0,1[\Rightarrow f$ è monotona crescente su $[0,1[$

f è monotona decrescente su $]-\infty,0]$ e su $]1,+\infty[$

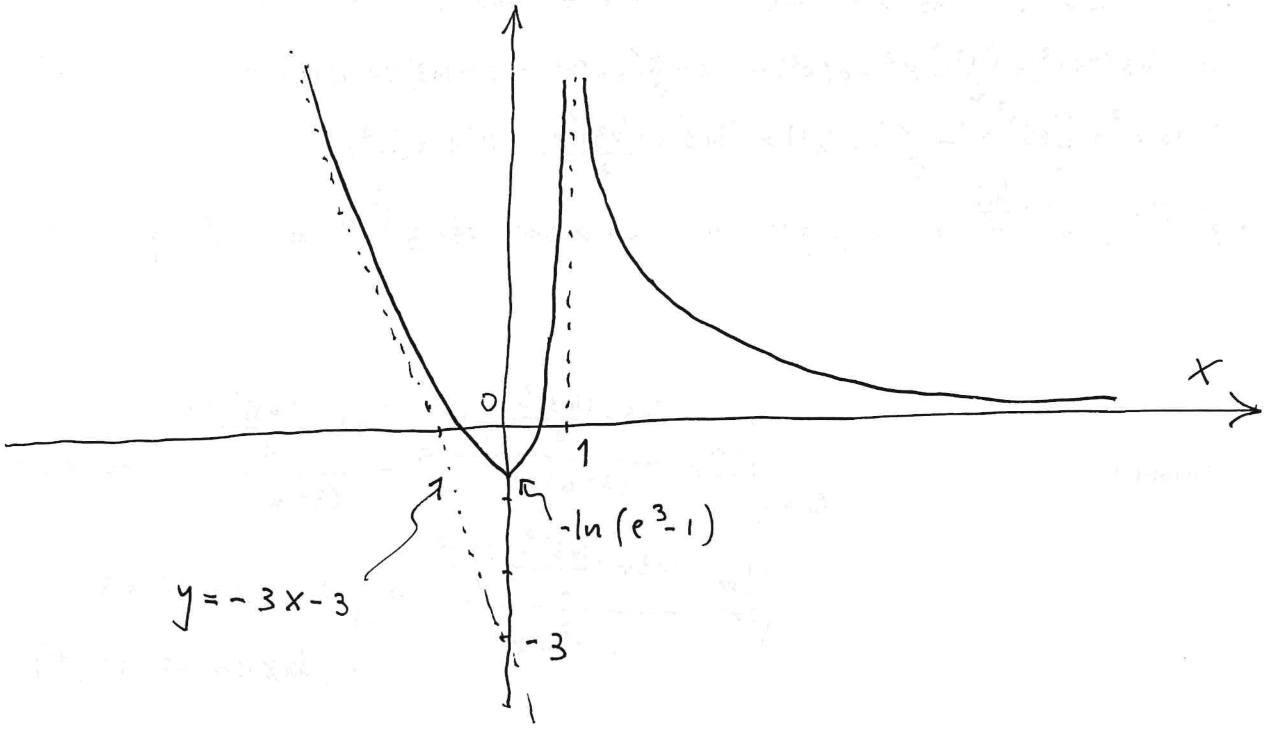
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x = 0$ punto di minimo assoluto, $f(0) = -\ln(e^3-1)$

$\nexists$ punti di massimo relativo od assoluto

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) = [-\ln(e^3-1), +\infty[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(2-\alpha)}}\right) dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(2-\alpha)}}\right) dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_3^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(2-\alpha)}}\right) dx, \quad I_2 = \int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(2-\alpha)}}\right) dx$$

i) $I_1 \sim \int_3^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} dx$ che è convergente $\Rightarrow I_1$ è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) $\alpha \leq 2$: $I_2 \sim \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{1/3}} \cdot \frac{1}{x^{(2-\alpha)}} dx = \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{(7/3-\alpha)}} dx$ che è convergente $\Leftrightarrow \frac{7}{3} - \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{4}{3}$

$\alpha > 2$: $I_2 \sim \int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ che è divergente a $+\infty$ $\Rightarrow I_2$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < \frac{4}{3} \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq \frac{4}{3} \end{cases}$

i) e ii) $\Rightarrow \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(2-\alpha)}}\right) dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < \frac{4}{3} \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq \frac{4}{3} \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{y}{1-e^x} + e^x, \qquad x > 0, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata a (1):

$$\varphi_c(x) = c\, e^{\int \frac{dx}{1-e^x}} = c\, e^{\int \left(1 + \frac{e^x}{1-e^x}\right) dx} = c\, e^{(x - \ln|1-e^x|)} \underset{(x>0)}{=} c\, e^{x - \ln(e^x - 1)} = c \frac{e^x}{e^x - 1}$$

- Integrale generale di (1):

$$\psi_c(x) = \frac{e^x}{e^x-1}\left[c + \int \frac{e^x - 1}{e^x} \cdot e^x dx\right] = \frac{e^x}{e^x-1}\left[c + \int (e^x - 1) dx\right] = \frac{e^x}{e^x-1}\left[c - x + e^x\right]$$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = \frac{y}{1-e^x} + e^x, & x > 0, \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$$0 = \psi_c(1) = \frac{e}{e-1}\left[c - 1 + e\right] \Rightarrow c = 1 - e$$

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}\left[1 - e - x + e^x\right]$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 0, 2$

$\phi(c_1, c_2; x) =$ $c_1 + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' = \cos(2x) \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K_1 \cos(2x) + K_2 \operatorname{sen}(2x)$

$\Psi'(x) = -2K_1 \operatorname{sen}(2x) + 2K_2 \cos(2x), \quad \Psi''(x) = -4K_1 \cos(2x) - 4K_2 \operatorname{sen}(2x)$

$\Psi''(x) - 2\Psi'(x) = -4K_1 \cos(2x) - 4K_2 \operatorname{sen}(2x)$
$\quad -4K_2 \cos(2x) + 4K_1 \operatorname{sen}(2x) = -4(K_1 + K_2)\cos(2x) + 4(K_1 - K_2)\operatorname{sen}(2x)$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = -\frac{1}{4} \\ K_1 - K_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2K_1 = -\frac{1}{4} \\ K_1 = K_2 \end{cases} \Leftrightarrow K_1 = K_2 = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow \Psi(x) = -\frac{1}{8}\left(\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)\right)$

$\psi(c_1, c_2; x) =$ $c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{8}\left(\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)\right)$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' = \cos(2x)\,, \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = -\frac{1}{4}\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = 2c_2 e^{2x} - \frac{2}{8}\left(-\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)\right)$

$\left.\begin{array}{l} 0 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{8} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{8} - c_2 \\ -\frac{1}{4} = \Psi'(c_1, c_2; 0) = 2c_2 - \frac{1}{4} \Rightarrow c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{8}$

$\psi(x) =$ $\frac{1}{8}\left(1 - \cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)\right)$