

II APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2023/2024, 19 Febbraio 2024
Tema 1

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4 punti] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) \left(\frac{3^n + 2n!}{7^n + (n+1)!} \right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [6 punti] Studiare il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \ln 4) \operatorname{sen} x + 4^{(x+x^2)} - e^x + 4^{(-\frac{1}{x})}}{x^3 \ln x + (\alpha - 4)x^2}$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \rightarrow 0$) di:

$$(1 - \ln 4) \operatorname{sen} x + 4^{(x+x^2)} - e^x + 4^{(-\frac{1}{x})} =$$

(fornendo le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$$\ell_\alpha =$$

ESERCIZIO 3. [8 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln |e^{2x} - e^2| - 2|x|$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

(v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} \arctan\left(\frac{1}{x^{(\alpha-3)}}\right) dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 5. [5 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{y}{1+e^x} + e^x \quad (1)$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{y}{1+e^x} + e^x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6.

- (i) [2 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + y' = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\phi(c_1, c_2; x) =$$

- (ii) [2.5 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + y' = \text{sen}(2x) \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(c_1, c_2; x) =$$

- (iii) [1.5 punti] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = \text{sen}(2x), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(x) =$$