

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. dell'Energia (II Squadra)

A.A. 2009/2010, 28 Giugno 2010

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(1-x) + \ln x}{(e^{(x+1)} - e^2)^2}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $\operatorname{sen}(1-x) + \ln x$, e di $(e^{(x+1)} - e^2)^2$:

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + n^{\ln n}}{\alpha^n}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{2}{x^2}}}{|2x^2 - 1|}.$$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_1^{\ln|x|} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$$

e si determini:

- (i) l'insieme dei punti di continuità di f ;

- (ii) l'insieme dei punti di derivabilità di f

e se ne calcoli la derivata

$$f'(x) =$$

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\dot{y} - y \cdot \arctan x = x e^{(x \cdot \arctan x)} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) $t \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $t \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione $x \mapsto y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} - y \cdot \arctan x = x e^{(x \cdot \arctan x)}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$y(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy + 3x + 2y^2}}.$$

- (i) Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f_x(x, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

e determinare eventuali punti critici di f :

- (ii) Calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinare la natura dei punti critici di f .

- (iii) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(3, 3, 1/6)$: