

# III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (V Canale)

A.A. 2011/2012, 9 Luglio 2012

Tema 1

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: .....

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

**ESERCIZIO 1.** [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y' = \frac{2-y}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni)  $x \mapsto \varphi_c(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni)  $x \mapsto \psi_c(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione  $x \mapsto \psi(x)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2-y}{\sqrt{1-x^2}}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

**ESERCIZIO 2.** [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \ln(|1 - 2x| - x)$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di  $f$ .

- (v) Determinare l'immagine di  $f$  :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

**ESERCIZIO 3.** [6 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \int_{\operatorname{sen}(-x)}^{\operatorname{sen}(x)} \operatorname{arcsen}^2(t) dt$ .

(i) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

(ii) Studiare il segno della derivata stabilendo in quali intervalli la funzione è monotona crescente ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iii) Stabilire se la funzione ammette massimi e minimi assoluti, ed in tal caso determinarne il valore.

**ESERCIZIO 4.** [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-1}^{+\infty} (x+1)^{3\alpha x} dx$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

**ESERCIZIO 5.** [5 punti] Studiare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{2}{x}} + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\ln\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico del numeratore (specificando le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$$\ell =$$

**ESERCIZIO 6.** [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + \alpha n - 1}{n^2} \right)^{n^2}$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.