

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (V Canale)

A.A. 2011/2012, 9 Luglio 2012

Tema 2

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y' = \frac{3-y}{1+x^2}. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3-y}{1+x^2}, \\ y(0) = -1, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 2. [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \ln(|3x + 1| + 2x)$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 3. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{\tan(-x)}^{\tan(x)} \arctan^2(t) dt$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(i) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

(ii) Studiare il segno della derivata stabilendo in quali intervalli la funzione è monotona crescente ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iii) Stabilire se la funzione ammette massimi e minimi assoluti, ed in tal caso determinarne il valore.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} (x-1)^{2\alpha x} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 5. [5 punti] Studiare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 \tan\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{3}{x}}}{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico del numeratore (specificando le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 6. [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 - \alpha n + 1}{n^3} \right)^{n^3}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.