

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (I Canale)
A.A. 2012/2013, 9 Luglio 2013

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Studiare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right) - 1 \right).$$

fornendo le argomentazioni principali:

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{n^{\alpha}}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{|x|} \right)$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

- (vi) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$:

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^{(\sin x)^2} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$.

(i) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

(ii) Studiare il segno della derivata prima e determinare in quali intervalli la funzione $f(x)$ è monotona crescente ed in quali è monotona decrescente

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = x \left(\frac{y}{1+x^2} + 1 \right). \quad (1)$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x \left(\frac{y}{1+x^2} + 1 \right), \\ y(0) = -1, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\ln x} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.