

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale e Meccanica (I Canale)
A.A. 2013/2014, 9 Luglio 2014

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{\left(\frac{1}{n+3}\right)} \right)}{2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+3}}$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n!} \right)^{(n+1)!}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \sinh\left(\frac{|x-1|}{x^2+x+1}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f

(v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

(vi) Determinare se esiste una retta di equazione $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, che ha un solo punto di intersezione col grafico della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^{x^3-1} \sqrt[3]{|s+1|} dt$.

- (i) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire se la funzione ammette punti di flesso con tangente orizzontale:

- (ii) Determinare se esistono eventuali asintoti (verticali, orizzontali od obliqui)

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$(y+1)y' = e^{-(y^2+2y)}. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- (ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (y+1)y' = e^{-(y^2+2y)}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.