

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2020/2021, 12 Luglio 2021

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [6 punti] Studiare il carattere (la convergenza semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_{\alpha} \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x+9}-2)}{\exp\left(\frac{\alpha}{x}\right) - 1 + \operatorname{sen}(2x)}$.
Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \rightarrow 0$) di:

$$\ln(\sqrt{x+9}-2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

Determinare il limite

$$\ell_{\alpha} =$$

ESERCIZIO 3. [10 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- (v) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

- (vi) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{1}{\ln(1+t)} dt$.

- (i) Determinare il dominio della funzione e l'insieme di positività

$$\text{Dom}(f) = \qquad \qquad \qquad \{f \geq 0\} =$$

- (ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

ESERCIZIO 5. [7 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = e^x \sqrt{1 - y^2}. \qquad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- (ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = e^x \sqrt{1 - y^2}, \\ y(\ln \pi) = 1. \end{cases}$$
 (esplicitando i passaggi principali).

$$\varphi(x) =$$