III APPELLO di
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2021/2022, 12 Luglio 2022

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza (semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

• $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1 = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1 = e^{\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}-1 = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ la serie non converge assolutamente perchè $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)\right|$ si comporta come la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ che è divergente

• $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right\}_n$ è decrescente $\left(f(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x-1,\ f'(x)=f(x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}\right]<0\right.$ definitivamente per $\left.x\to+\infty\right)$ e infinitesima $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$ converge semplicemente per criterio di Leibiz per serie a termini di segno alterno.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to0+}\dfrac{\ln((1+x)^{2x}+4(\cos x-1)+\tan(x^3)}{\mathrm{sen}(x^\alpha)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x\to0$) di: $\ln((1+x)^{2x}+4(\cos x-1)+\tan(x^3)$, ed il limite ℓ_α, fornendo le argomentazioni principali.

• $\ln\left((1+x)^{2x}\right) = 2x\cdot\ln(1+x) = 2x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) = 2x^2-x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$

• $4(\cos x-1) = 4\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right) = -2x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^5)$

• $tg(x^3) = x^3+o(x^5)$

$\Rightarrow \ln\left((1+x)^{2x}\right)+4(\cos x-1)+\tan(x^3) = 2x^2-x^3+\frac{2}{3}x^4-2x^2+\frac{x^4}{6}+x^3+o(x^4)$

$= \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)x^4+o(x^4) = \frac{5}{6}x^4+o(x^4)$

$\ln((1+x)^{2x}+4(\cos x-1)+\tan(x^3) = \frac{5}{6}x^4+o(x^4)$

$\mathrm{sen}(x^\alpha) = \begin{cases} x^\alpha+o(x^\alpha) & \text{se } \alpha>0 \\ \mathrm{sen}\,1 & \text{se } \alpha=0 \end{cases}$, $\lim_{x\to0+}\mathrm{sen}(x^\alpha)\ \nexists$ se $\alpha<0$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>4 \\ \frac{5}{6} & \text{se } \alpha=4 \\ 0 & \text{se } 0\le\alpha<4 \\ \nexists & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\exp(\frac{1}{x})\right) - x$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) + x = \frac{\pi}{4}$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = \frac{\pi}{4}$

$y = -x + \frac{\pi}{4}$ è asintoto obliquo bilatero per $x \to +\infty$, per $x \to -\infty$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \arctan(0) = 0$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1 + e^{\left(\frac{2}{x}\right)}} - 1$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

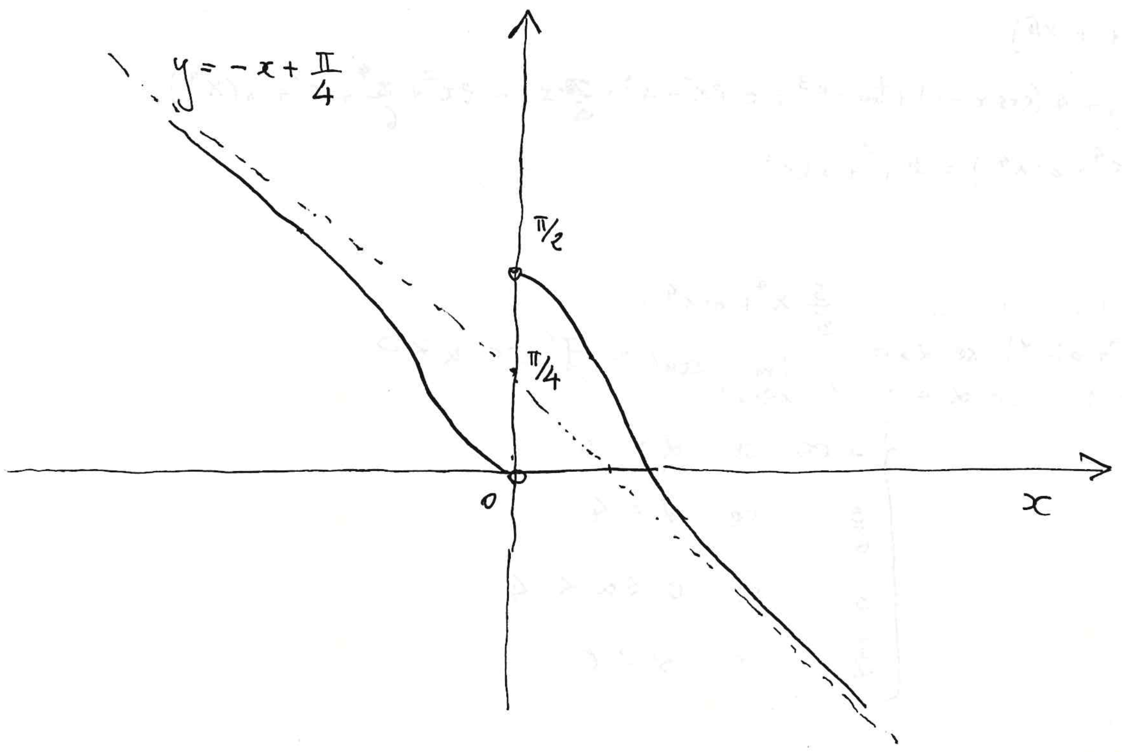
$f'(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f$ è decrescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Non esistono punti di massimo o di minimo (locale o globale)

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\exp(x^3) - 1}{x^\alpha \sqrt[3]{1 - x^2}}\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_0^1 \frac{e^{(x^3)} - 1}{x^\alpha \sqrt[3]{1-x^2}}\, dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^{1/2} \frac{e^{(x^3)} - 1}{x^\alpha \sqrt[3]{1-x^2}}\, dx, \quad I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{e^{(x^3)} - 1}{x^\alpha \sqrt[3]{1-x^2}}\, dx$$

i) $I_1 \sim \int_0^{1/2} \frac{x^3}{x^\alpha}\, dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^{(\alpha-3)}}\, dx$ convergente $\iff \alpha - 3 < 1 \iff \alpha < 4$

$$\Rightarrow I_1 \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < 4 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq 4 \end{cases}$$

ii) $I_2 \sim \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}}\, dx \sim \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\, dx$ convergente $\Rightarrow I_2$ è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{i) e ii)} \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{(x^3)} - 1}{x^\alpha \sqrt[3]{1-x^2}}\, dx \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < 4 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq 4 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$e^y \, \dot{y} = 2x(1 + e^{2y}). \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Non esistono soluzioni costanti
- Soluzioni non costanti soddisfano: $\int \frac{e^y}{1+e^{2y}}\, dy = \int 2x\, dx = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \arctan(e^y) = x^2 + c \Rightarrow e^y = \tan(x^2 + c), \quad x^2 + c \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow y = \ln(\tan(x^2 + c)), \quad x^2 + c \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow$ Soluzioni di (1) sono:

$$\varphi(x; c) = \ln(\tan(x^2 + c)), \quad x^2 + c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} e^y \, \dot{y} = 2x(1 + e^{2y}), \\ y(2) = \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$\ln\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi(2; c) = \ln(\tan(4 + c)) \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \tan(4 + c) \Rightarrow c = \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4$

$$\varphi(x) = \ln\left(\tan\left(x^2 + \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\right)\right), \quad x^2 + \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + 4y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

$$\phi(c_1, c_2; x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + 4y = \cos x \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x$

$\Psi'(x) = -K_1 \operatorname{sen} x + K_2 \cos x$, $\Psi''(x) = -K_1 \cos x - K_2 \operatorname{sen} x$

$\Psi''(x) + 4\Psi(x) = (-K_1 + 4K_1)\cos x + (-K_2 + 4K_2)\operatorname{sen} x$

$= 3K_1 \cos x + 3K_2 \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è una soluzione di (3) $\Longleftrightarrow K_1 = 1/3,\ K_2 = 0$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = \dfrac{\cos x}{3}$

$$\psi(c_1, c_2; x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x) + \frac{\cos x}{3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos x\,, \\ y(0) =, 1 \qquad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(x; c_1, c_2) = -2c_1 \operatorname{sen}(2x) + 2c_2 \cos(2x) - \dfrac{\operatorname{sen} x}{3}$

$1 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + \frac{1}{3} \Rightarrow c_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$0 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\boxed{\psi(x) = \frac{2}{3}\cos(2x) + \frac{\cos x}{3}}$$