III APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2022/2023, 10 Luglio 2023

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{\sqrt{2+n}}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- $\frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{\sqrt{2+n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{\sqrt{2+n}}\right|$ divergente

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{\sqrt{2+n}}$ non è assolutamente convergente

- $\left\{\frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{\sqrt{2+n}}\right\}_n$ è decrescente, infinitesima $\Rightarrow$ per criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{\sqrt{2+n}}$ è semplicemente convergente.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \neq 0$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+3x^\alpha)-3\,\text{sen}(x^\alpha)}{\cos(x^2)-1}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$\ln(1+3x^\alpha)-3\,\text{sen}(x^\alpha) = \begin{cases} -\frac{9}{2}x^{(2\alpha)} + o(x^{(2\alpha)}) & \text{se } \alpha > 0 \\ \ln(x^\alpha) + o(\ln x) = \alpha \ln x + o(\ln x) & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

e di:

$$\cos(x^2)-1 = -\frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

(fornendo le argomentazioni principali).

- $\alpha > 0$ $\ln(1+3x^\alpha) - 3\,\text{sen}(x^\alpha) = 3x^\alpha - \frac{9}{2}x^{(2\alpha)} + o(x^{(2\alpha)}) - 3x^\alpha + o(x^{(2\alpha)})$

$= -\frac{9}{2}x^{(2\alpha)} + o(x^{(2\alpha)})$

- $\alpha < 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \Rightarrow \ln(1+3x^\alpha) - 3\,\text{sen}(x^\alpha) = \ln(1+3x^\alpha) + o(\ln(1+3x^\alpha))$

$= \ln(3x^\alpha) + o(\ln(3x^\alpha)) = \ln(x^\alpha) + o(\ln(x^\alpha))$

$= \alpha \ln x + o(\ln x)$ per $x \to 0^+$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{\ldots}{2}x^{\ldots}}{-\frac{x^4}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 2 \\ 9 & \text{se} \quad \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < \alpha < 2 \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\alpha \ln x}{-\frac{x^4}{2}} = -\infty \quad \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

(Se esiste)

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right) - \frac{1}{1+|x|}$

Nota: f è una funzione pari. Quindi si poteva studiare solo per $x > 0$ e poi estendere per simmetria le risposte su tutto il dominio.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ asintoto verticale bilatero

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale bilatero

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}\left(-\frac{\mathrm{sgn}(x)}{|x|^2}\right) + \frac{\mathrm{sgn}(x)}{(1+|x|)^2} = \frac{\mathrm{sgn}(x)\,(-|x|-1+|x|)}{(1+|x|)^2\,|x|} = -\frac{1}{(1+|x|)^2\,x}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$\{f' \geq 0\} =]-\infty, 0[\Rightarrow f$ è crescente su $]-\infty, 0[$

f è decrescente su $]0, +\infty[$

(iv) Calcolare la derivata seconda della funzione

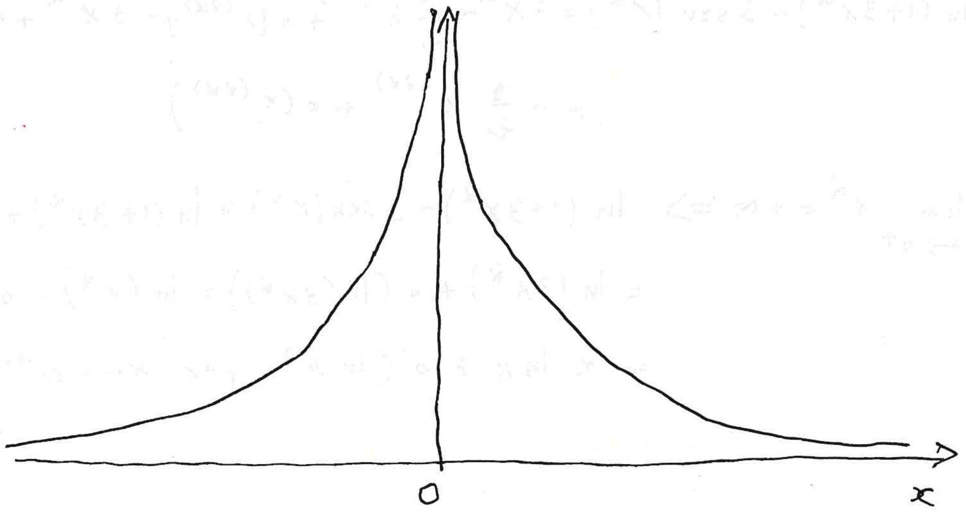
$$f''(x) = \frac{(1+|x|)^2 + 2x(1+|x|)\,\mathrm{sgn}(x)}{x^2(1+|x|)^4} = \frac{(1+|x|)(1+|x|+2|x|)}{x^2(1+|x|)^4} = \frac{1+3|x|}{x^2(1+|x|)^3}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

$\{f'' \geq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow f$ è convessa su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]0, +\infty[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\ln x}\,dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\ln x}\,dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^{1/2} \frac{(1-x)^\alpha}{\ln x}\,dx, \quad I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\ln x}\,dx$$

$$\text{i)}\ I_1 \sim \int_0^{1/2} \frac{1}{\ln x}\,dx, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{1}{\ln x}\,dx \text{ è convergente}$$

$$\Rightarrow I_1 \text{ è convergente } \forall \alpha$$

$$\text{ii)}\ I_2 \sim \int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\ln(1+(x-1))}\,dx \sim \int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{(x-1)}\,dx = -\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-x)^{(1-\alpha)}}\,dx \text{ convergente}$$

$$\Leftrightarrow 1-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0 \Rightarrow I_2 \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > 0 \\ \text{divergente a } -\infty \ \forall \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{i) e ii)} \Rightarrow \int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\ln x}\,dx \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > 0 \\ \text{divergente a } -\infty \ \forall \alpha \leq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$y\,y' = x^2 - x^2y^2\,, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Sol. costanti: $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = -1$
- Sol. non costanti: $\int \frac{y}{1-y^2}\,dy = \int x^2\,dx \Rightarrow \ln|1-y^2| = -\frac{2}{3}x^3 + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |1-y^2| = c_2\, e^{\left(-\frac{2}{3}x^3\right)},\ c_2 > 0 \Rightarrow 1-y^2 = c_3\, e^{\left(-\frac{2}{3}x^3\right)},\ c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - c_3\, e^{\left(-\frac{2}{3}x^3\right)},\ c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Sol. non costanti: } \varphi_3(x;c) = \sqrt{1 - c\, e^{\left(-\frac{2}{3}x^3\right)}},\quad c \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_4(x;c) = -\sqrt{1 - c\, e^{\left(-\frac{2}{3}x^3\right)}},\quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y\,y' = x^2 - x^2y^2\,, \\ y(0) = -3\,, \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$$-3 = \varphi_4(0;c) = -\sqrt{1-c} \Rightarrow 3 = \sqrt{1-c} \Rightarrow 1-c = 9 \Rightarrow c = -8$$

$$\varphi(x) = -\sqrt{1 + 8\, e^{\left(-\frac{2}{3}x^3\right)}}$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' - 5y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$

$\phi(c_1, c_2; x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' - 5y = 3\,e^{5x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Sol. particolare di (3) della forma $\Psi(x) = k\,x\,e^{5x}$

$\Psi'(x) = e^{5x}(K + 5Kx)$, $\Psi''(x) = e^{5x}(10K + 25Kx) \Rightarrow$

$\Psi''(x) - 4\Psi'(x) - 5\Psi(x) = e^{5x}(10K + 25Kx - 4K - 20Kx - 5Kx)$

$= 6Ke^{5x} \Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = \frac{x}{2} e^{5x}$

$\psi(c_1, c_2; x) = c_1 e^{-x} + \left(c_2 + \frac{x}{2}\right) e^{5x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 3\,e^{5x}, \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = -c_1 e^{-x} + \left(\frac{1}{2} + 5c_2 + \frac{5}{2}x\right) e^{5x}$

$0 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2$

$-\frac{5}{2} = \Psi'(c_1, c_2; 0) = -c_1 + \frac{1}{2} + 5c_2 = 6c_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow 6c_2 = -\frac{6}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2}$

$\psi(x) = \frac{e^{-x}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) e^{5x}$ $\qquad c_1 = \frac{1}{2}$