

III APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2022/2023, 10 Luglio 2023

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4 punti] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \tan(\frac{1}{n})}{\sqrt{2+n}}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \neq 0$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 3x^\alpha) - 3 \operatorname{sen}(x^\alpha)}{\cos(x^2) - 1}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \rightarrow 0$) di:

$$\ln(1 + 3x^\alpha) - 3 \operatorname{sen}(x^\alpha) =$$

e di:

$$\cos(x^2) - 1 =$$

(fornendo le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$$\ell_\alpha =$$

ESERCIZIO 3. [7 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right) - \frac{1}{1 + |x|}$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

(v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\ln x} dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 5. [5 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y y' = x^2 - x^2 y^2, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y y' = x^2 - x^2 y^2, \\ y(0) = -3, \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6.

- (i) [2 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' - 5y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\phi(c_1, c_2; x) =$$

- (ii) [2.5 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' - 5y = 3e^{5x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(c_1, c_2; x) =$$

- (iii) [1.5 punti] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 3e^{5x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(x) =$$