III APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2023/2024, 16 Luglio 2024

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^4}{n^{2n}}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

• Criterio del rapporto: $\lim_n \frac{((n+1)!)^4}{(n+1)^{2(n+1)}} \cdot \frac{n^{2n}}{(n!)^4} = \lim_n \frac{(n+1)^4 \cdot \cancel{(n!)^4}}{(n+1)^{2n} \cdot (n+1)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{\cancel{(n!)^4}} =$

$= \lim_n (n+1)^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}} = \lim_n (n+1)^2 \cdot \frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2} = \frac{1}{e^2} \cdot \lim_n (n+1)^2 = +\infty > 1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^4}{n^{(2n)}}$ è divergente a $+\infty$.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \geq 0$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\operatorname{sen} x) - \exp(x^\alpha)}{\tan(x^\alpha)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$\cos(\operatorname{sen} x) - \exp(x^\alpha) = \begin{cases} 1 - e + o(1) & \text{se } \alpha = 0 \\ -x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 2 \\ -\frac{x^2}{2} + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

e di:

$$\tan(x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

• $\cos(\operatorname{sen} x) = \cos\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^5) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^5)$

$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$

• $e^{(x^\alpha)} = 1 + x^\alpha + o(x^\alpha) \Rightarrow \cos(\operatorname{sen} x) - e^{(x^\alpha)} = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 - x^\alpha + o(x^5) + o(x^\alpha)$

• $\operatorname{tg}(x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha)$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1-e}{tg(1)} & se \ \alpha = 0 \\ -1 & se \ 0 < \alpha < 2 \\ -3/2 & se \ \alpha = 2 \\ -\infty & se \ \alpha > 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \cosh\left(\frac{|2-x|}{x^2+3x-10}\right) = \cosh\left(\frac{|2-x|}{(x-2)(x+5)}\right)$

$= \cosh\left(\frac{sgn(x-2)}{x+5}\right) = \cosh\left(\frac{1}{x+5}\right)$

(cosh è funzione pari)

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- $\lim_{x \to 2} f(x) = \cosh\left(\frac{1}{7}\right)$, $\lim_{x \to -5} f(x) = +\infty \Rightarrow \boxed{x=-5 \text{ è asintoto verticale bilatero}}$
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \cosh(0) = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 \text{ è asintoto orizzontale bilatero}}$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{1}{x+5}\right)\left(-\frac{1}{(x+5)^2}\right)$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- $f'(x) \geq 0 \iff x+5 < 0 \iff x < -5 \Rightarrow \{f' \geq 0\} =]-\infty, -5[$

$\Rightarrow f$ è crescente su $]-\infty, -5[$, è decrescente su $]-5, 2[$ e su $]2, +\infty[$

(iv) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) = \cosh\left(\frac{1}{x+5}\right) \cdot \frac{1}{(x+5)^4} + \operatorname{senh}\left(\frac{1}{x+5}\right) \cdot \frac{2}{(x+5)^3}$$

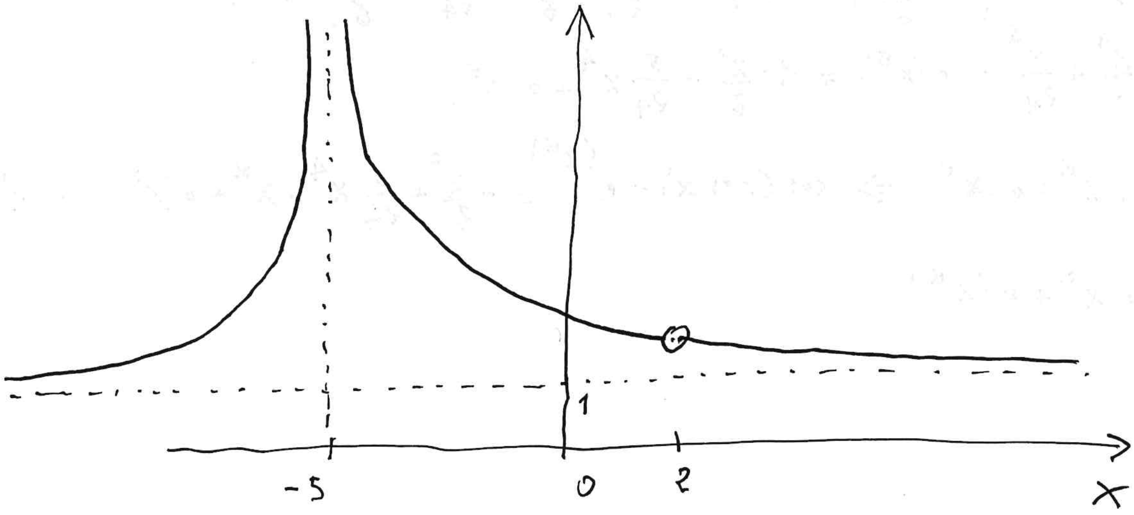
e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

- $sen\left(\frac{1}{x+5}\right) \cdot \left(\frac{1}{x+5}\right) > 0 \ \forall x \neq -5 \Rightarrow f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$

$\Rightarrow \{f'' \geq 0\} = \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow f$ è convessa su $]-\infty, -5[$, su $]-5, +2[$ e su $]2, +\infty[$.

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]1, +\infty[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x^\alpha(x-1)}\right)(\operatorname{sen} x)^\alpha \, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x^\alpha(x-1)}\right)(\operatorname{sen} x)^\alpha dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^{1/2} \exp\left(\frac{1}{x^\alpha(x-1)}\right)(\operatorname{sen} x)^\alpha dx, \quad I_2 = \int_{1/2}^1 \exp\left(\frac{1}{x^\alpha(x-1)}\right)(\operatorname{sen} x)^\alpha dx$$

i) $I_1 \sim \int_0^{1/2} e^{-\frac{1}{x^\alpha}} \cdot x^\alpha dx$. Se $\alpha \geq 0$ $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^\alpha}} \cdot x^\alpha = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{x^\alpha}} \cdot x^\alpha$ è funzione limitata su $[0, 1/2]$ e dunque I_1 è convergente per confronto asintotico $\forall \alpha \geq 0$

Se $\alpha < 0$ $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^\alpha}} = 1 \Rightarrow I_1 \sim \int_0^{1/2} x^\alpha dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^{(-\alpha)}} dx$ convergente $\Leftrightarrow -\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$

$$\Rightarrow I_1 \text{ è } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha > -1 \\ \text{è divergente a } +\infty \text{ se } \alpha \leq -1 \end{cases}$$

ii) $I_2 \sim \int_{1/2}^1 e^{\frac{1}{(x-1)}} dx$, $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)}} = 0 \Rightarrow I_2$ è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x^\alpha(x-1)}\right)(\operatorname{sen} x)^\alpha dx \text{ è } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha > -1 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ se } \alpha \leq -1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(1+x^2)\cos y - 2x(1+\operatorname{sen} y) = 0, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Sol. costanti : $\varphi_1(x) = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Sol. non costanti : $\int \frac{\cos y}{1+\operatorname{sen} y} dy = \int \frac{2x}{1+x^2} dx \Rightarrow \ln(1+\operatorname{sen} y) = \ln(1+x_2) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$,

$\Rightarrow 1 + \operatorname{sen} y = c_2(1+x^2)$, $c_2 = e^{c_1} > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} y = c_2(1+x^2) - 1$

$\Rightarrow y = \operatorname{arcsen}(c_2(1+x^2)-1)$

$\Rightarrow$ Sol. non costanti : $\varphi_2(x; c) = \operatorname{arcsen}(c(1+x^2)-1)$, $c > 0$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'(1+x^2)\cos y - 2x(1+\operatorname{sen} y) = 0, , \\ y(0) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$\frac{\pi}{2} = \varphi_2(0; c) = \operatorname{arcsen}(c-1) \Rightarrow 1 = c-1 \Rightarrow c = 2$

$\varphi(x) = \operatorname{arcsen}(2(1+x^2)-1)$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = P(\lambda)$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$

$\phi(c_1, c_2; x) =$ $e^x (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' + 2y = 2\,e^x \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Sol. particolare di (3) della forma $\Psi(x) = k e^x$

$\Psi'(x) = \Psi''(x) = \Psi(x) = k e^x \Rightarrow \Psi''(x) - 2\Psi'(x) + 2\Psi(x) =$

$k(e^x - 2e^x + 2e^x) = 2e^x \Rightarrow k = 2$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = 2e^x$

$\psi(c_1, c_2; x) =$ $e^x (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 2)$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 2\,e^x\,, \\ y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 2 - c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x) =$

$= e^x ((c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \operatorname{sen} x + 2)$

$-1 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + 2 \Rightarrow c_1 = -3$. $+1 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = -3 + c_2 + 2 \Rightarrow c_2 = 2$

$\psi(x) =$

$= e^x (-3 \cos x + 2 (\operatorname{sen} x + 1))$