

IV APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. dell'Energia (II Squadra)

A.A. 2009/2010, 13 Settembre 2010

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite (al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\ell_\alpha \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} \ln n - 2n^2}{n^\alpha \cos(1/n)}$$

specificando le argomentazioni principali.

$$\ell_\alpha =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{n^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - x - 6}{x + 4}\right).$$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_1^{x^x} \frac{1}{1 + \ln t} dt$$

e si determini:

- (i) l'insieme dei punti di continuità di f ;

- (ii) l'insieme dei punti di derivabilità di f

e se ne calcoli la derivata

$$f'(x) =$$

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 8 \cos(2x) \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- (i) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) $t \mapsto \varphi_{c_1, c_2}(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione omogenea associata a (??)

$$\varphi_{c_1, c_2}(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $t \mapsto \psi_{c_1, c_2}(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (??)

$$\psi_{c_1, c_2}(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione $x \mapsto y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, del problema

$$\begin{cases} \ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 8 \cos(2x), \\ y(0) = 3, \quad y(\pi) = 1. \end{cases}$$

$$y(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + xy.$$

- (i) Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f_x(x, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

e determinare eventuali punti critici di f :

- (ii) Calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinare la natura dei punti critici di f .

- (iii) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1/2, -1/2, 0)$: