

IV APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (V Canale)

A.A. 2011/2012, 10 Settembre 2012

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y' = \left(1 + \frac{y}{2 + \cos x}\right) \cdot \operatorname{sen} x. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1) (riportando i passaggi principali)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1) (riportando i passaggi principali)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \left(1 + \frac{y}{2 + \cos x}\right) \cdot \operatorname{sen} x, \\ y(\pi) = 2. \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 2. [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - |\cos x|}$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 3. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_1^{(e^{|x-1|}-1)} \frac{1}{\ln(1+t)} dt$.

(i) Determinare il dominio della funzione e calcolare la derivata prima

$$f'(x) =$$

(ii) Studiare il segno della derivata stabilendo in quali intervalli la funzione è monotona crescente ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iii) Stabilire se la funzione ammette asintoti, e determinare eventuali punti di massimo o di minimo.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^\alpha}{\ln(\cos x)} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 5. [5 punti] Studiare il limite

$$l_\alpha \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln(\cos x)}{x^\alpha}.$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando le argomentazioni principali.

(Per i valori α in cui esiste)

$$l_\alpha =$$

ESERCIZIO 6. [4 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{2}{n+1}} - e^{\frac{2}{n}} \right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.