

# IV APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (I Canale)

A.A. 2012/2013, 13 Settembre 2013

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: .....

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

|  |
|--|
|  |
|--|

**ESERCIZIO 1.** [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$(1 + e^x)y' = e^x \left( y + \frac{2}{1 + e^x} \right). \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni)  $x \mapsto \varphi_c(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1) (riportando i passaggi principali)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni)  $x \mapsto \psi_c(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dell'equazione completa (1) (riportando i passaggi principali)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare (se esiste) la soluzione  $x \mapsto \psi(x)$  dell'equazione completa (1) che soddisfa la condizione  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0$ . (riportando i passaggi principali)

$$\psi(x) =$$

**ESERCIZIO 2.** [9 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = x |1 + \ln x|$ .

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di  $f$  ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- (v) Determinare l'immagine di  $f$  :  $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

- (vi) Determinare quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = \frac{1}{e^2}$ :

**ESERCIZIO 3.** [6 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \int_0^{x^2-6x+9} \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$ .

(i) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

(ii) Studiare il segno della derivata prima, determinare in quali intervalli la funzione  $f(x)$  è monotona crescente ed in quali è monotona decrescente, e se ammette punti di massimo o minimo assoluto.

**ESERCIZIO 4.** [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x} (\cos x)^\alpha} dx$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

**ESERCIZIO 5.** [5.5 punti] Studiare al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  il limite

$$\ell_\alpha \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 + \frac{n^\alpha}{3n^2}.$$

fornendo le argomentazioni principali:

(Se esiste)

$$\ell_\alpha =$$

**ESERCIZIO 6.** [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.