

# IV APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale e Meccanica (I Canale)  
A.A. 2013/2014, 12 Settembre 2014

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: .....

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

**ESERCIZIO 1.** [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( e^{(x^2/2)} \cos x \right)}{(\operatorname{sen}(x^2))^2}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di  $\ln \left( e^{(x^2/2)} \cos x \right)$  per  $x \rightarrow 0$  (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

**ESERCIZIO 2.** [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left( \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

**ESERCIZIO 3.** [9 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \frac{|1 - \ln x|}{x}$ .

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di  $f$

(v) Determinare l'immagine di  $f$  :  $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

(vi) Determinare se esiste una retta di equazione  $y = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , che ha (esattamente) due punti di intersezione col grafico della funzione.

**ESERCIZIO 4.** [6 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \int_0^{2x^3+x^2} e^{-1/t^2} dt$ .

- (i) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e determinare eventuali punti di massimo o minimo relativo di  $f$  (fornendo le motivazioni):

- (ii) Determinare se esistono eventuali asintoti (verticali, orizzontali od obliqui) fornendo le motivazioni:

**ESERCIZIO 5.** [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x(1-x)}} + \sqrt{x} e^{2\arcsen(\sqrt{x})}, \quad 0 < x < 1. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni)  $x \mapsto \varphi_c(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni)  $x \mapsto \psi_c(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione  $x \mapsto \psi(x)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{\sqrt{x(1-x)}} + \sqrt{x} e^{2\arcsen(\sqrt{x})}, & 0 < x < 1, \\ y(1/4) = (1/3)e^{\pi/3}, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

**ESERCIZIO 6.** [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-1}^1 \frac{(x^2 - 1)^\alpha}{(x + 1) \ln |x|} dx$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.