IV APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2021/2022, 19 Settembre 2022

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza (semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+3n}-n}{n^\alpha}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- $\sqrt{n^2+3n}-n = n\sqrt{1+\frac{3}{n}}-n = n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right) = n\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{3}{2}+o(1) \Rightarrow \left\{\frac{\sqrt{n^2+3n}-n}{n^\alpha}\right\}_n$ è infinitesima $\forall \alpha > 0$

$\left\{\frac{\sqrt{n^2+3n}-n}{n^\alpha}\right\}_n$ è decrescente $\forall \alpha > 0$ $\left(f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x}-x}{x^\alpha},\ f'(x) = \frac{1}{x^{(\alpha+1)}}\left[\frac{2x^2+3x-2x\sqrt{x^2+3x}-\alpha x-\alpha\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}\right]\right.$

$\left. f'(x) < 0 \text{ definitivamente per } x \to +\infty \right) \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+3n}-n}{n^\alpha}$ è semplicemente convergente $\forall \alpha > 0$ per il criterio di Leibnitz

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n^2+3n}-n}{n^\alpha}\right|$ si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ che è convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1 \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+3n}-n}{n^\alpha} \text{ è } \begin{cases} \text{semplicemente convergente } \forall \alpha > 0 \\ \text{assolutamente convergente } \forall \alpha > 1 \\ \text{irregolare (o indeterminata) } \forall \alpha \leq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. [*5 punti*] Studiare il limite $\ell \doteq \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(1-x)+\ln x}{\left(e^{x+1}-e^2\right)^2}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 1$) di: $\operatorname{sen}(1-x)+\ln x$, di $\left(e^{x+1}-e^2\right)^2$ ed il limite ℓ, fornendo le argomentazioni principali.

- $\operatorname{sen}(1-x)+\ln x = \operatorname{sen}(1-x)+\ln(1+(x-1)) = (\cancel{1}-\cancel{x}) - \frac{(1-x)^3}{6} + o((1-x)^3) + (\cancel{x}-\cancel{1}) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) =$

$= -\frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$ per $x \to 1$

- $\left(e^{(x+1)}-e^2\right)^2 = \left(e^{((x-1)+2)}-e^2\right)^2 = \left(e^2\left(e^{(x-1)}-1\right)\right)^2 = e^4\left((x-1)+o((x-1)^2)\right)^2 =$

$= e^4(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ per $x \to 1$

$\operatorname{sen}(1-x)+\ln x = -\frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$ per $x \to 1$

$(e^{x+1}-e^2)^2 = e^4(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ per $x \to 1$

$$\ell = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{(x-1)^2}{2}}{e^4(x-1)^2} = -\frac{1}{2e^4}$$

ESERCIZIO 3. [*9 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+4}{x^2+2x-8}\right)$. $\left(f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x-2}\right) \right)$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$, $x = -4$ è discontinuità eliminabile $\Rightarrow$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{y \to -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \nexists$ asintoti verticali
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{y \to 0} \arctan(y) = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale bilatero per $x \to -\infty$, $x \to +\infty$

$\nexists$ asintoti obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = -\frac{1}{1+(x-2)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

f è decrescente su $]-\infty, 2[$ e su $]2, +\infty[$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Non esistono punti di massimo o di minimo locale o globale

(v) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) = \frac{1}{(1+(x-2)^2)^2} \cdot 2(x-2) \geq 0 \iff x > 2 \Rightarrow \{f'' \geq 0\} =]2, +\infty[$$

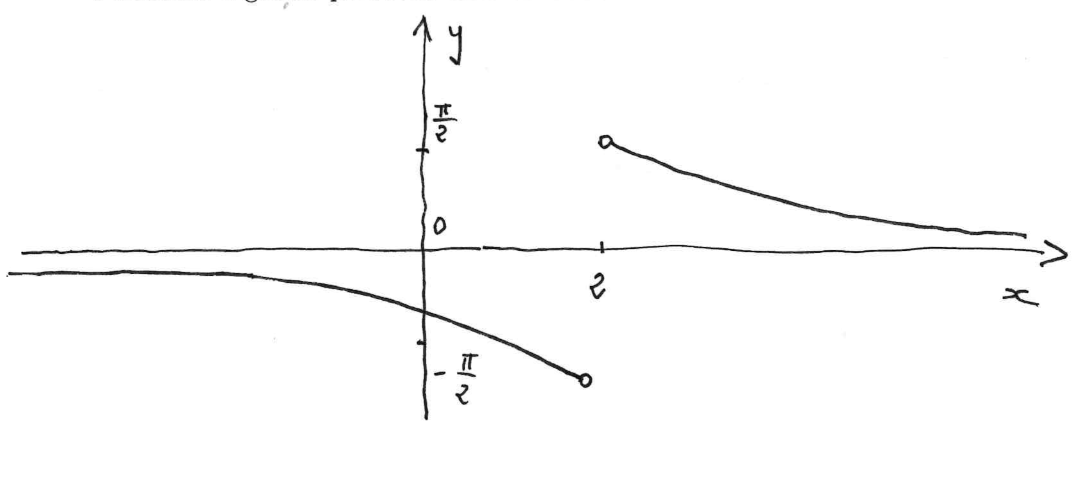
e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

f è convessa su $]2, +\infty[$ e concava su $]-\infty, 2[$

Non esistono punti di flesso.

(vi) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*5 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-1}^{0} (x+1)^{(3\alpha\, x)}\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\int_{-1}^{0} (x+1)^{(3\alpha x)} dx$ si comporta come $\int_{-1}^{0} (x+1)^{-3\alpha} dx$ che è convergente

$\iff 3\alpha < 1 \iff \alpha < \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\int_{-1}^{0} (x+1)^{(3\alpha x)} dx \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < \frac{1}{3} \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y' = x\left(\frac{y}{1+x^2} + 1\right). \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Integrale generale eq. omogenea $y' = y\,\frac{x}{1+x^2}$ è:

$$\Upsilon_c(x) = c\, e^{\int \frac{x}{1+x^2} dx} = c\, e^{\left(\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right)} = c\, e^{\left(\ln(\sqrt{1+x^2})\right)} = c\sqrt{1+x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Integrale generale eq. non omogenea completa:

$$\Psi_c(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot \left[c + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x\, dx\right] = \sqrt{1+x^2} \cdot \left[c + \sqrt{1+x^2}\right] = 1 + x^2 + c\sqrt{1+x^2},$$
$c \in \mathbb{R}$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x(\frac{y}{1+x^2} + 1), \\ y(0) = -1 \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$-1 = \Psi_c(0) = 1 + c \Rightarrow c = -2$

$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2\sqrt{1+x^2}$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

Radice doppia : $\lambda_{1,2} = 2$

$$\phi(c_1, c_2; x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = e^{2x}(c_1 + c_2 x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 4y = 8\cos(2x) \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K_1 \cos(2x) + K_2 \,\mathrm{sen}(2x)$

$\Psi'(x) = -2K_1 \,\mathrm{sen}(2x) + 2K_2 \cos(2x)$, $\Psi''(x) = -4K_1 \cos(2x) - 4K_2 \,\mathrm{sen}(2x)$

$$\begin{aligned}\Psi''(x) - 4\Psi'(x) + 4\Psi(x) &= -4K_1 \cos(2x) - 4K_2 \,\mathrm{sen}(2x) \\ &\quad - 8K_2 \cos(2x) + 8K_1 \,\mathrm{sen}(2x) \\ &\quad + 4K_1 \cos(2x) + 4K_2 \,\mathrm{sen}(2x) = -8K_2 \cos(2x) + 8K_1 \,\mathrm{sen}(2x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è una soluzione di (3) $\Leftrightarrow K_2 = -1$, $K_1 = 0$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = -\mathrm{sen}(2x)$

$$\psi(c_1, c_2; x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x} - \mathrm{sen}(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 8\cos(2x), \\ y(0) = 3 \qquad y'(0) = 5. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(x) = (2c_1 + c_2 + 2c_2 x)e^{2x} - 2\cos(2x)$

$3 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1$, $\quad 5 = \Psi'(3, c_2; 0) = (6 + c_2) - 2 = 4 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1$

$$\psi(x) = (3 + x)e^{2x} - \mathrm{sen}(2x)$$