IV APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2022/2023, 18 Settembre 2023

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

• $\left|\left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1\right| = \left|e^{\frac{1}{n^2}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right| = \left|e^{-\frac{\ln n}{n^2}} - 1\right| \sim \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=1} (-1)^n \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1\right)$ è assolutamente convergente e dunque anche semplicemente convergente

• $\left\{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right\}_n$ è decrescente $\left(f(x) = -\left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}, \ f'(x) = -e^{-\frac{\ln x}{x^2}}\left(\frac{-x+2x\ln x}{(x^4)}\right) = -e^{-\frac{\ln x}{x^2}} x(2\ln x - 1)\right.$
$\left.\Rightarrow f'(x) < 0 \text{ definitivamente per } x \to +\infty\right)$ e infinitesima $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1\right)$
è semplicemente convergente per criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{x^2}{x^2-3}\right) - 1}{x^\alpha}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to +\infty$) di:

$$x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{x^2}{x^2-3}\right) - 1 = -\frac{19}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$$x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{x^2}{x^2-3}\right) - 1 = x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - \ln\left(1 + \frac{3}{x^2-3}\right) - 1 = -\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{3}{x^2-3} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{6x^2} - \frac{3}{x^2} + \left(\frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^2-3}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{19}{6x^2} - \frac{9}{x^2(x^2-3)} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{19}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{19}{6x^2}}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{19}{6x^{(\alpha+2)}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -2 \\ -\frac{19}{6} & \text{se } \alpha = -2 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-9(\ln x)^2}\right)$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \sqrt[3]{e}\right] \quad \left(\begin{cases} \ln^2 x \leq \frac{1}{9} \\ x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\ln x| \leq \frac{1}{3} \\ x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow e^{-\frac{1}{3}} \leq x \leq e^{\frac{1}{3}} \right)$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\nexists$ asintoti

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-9\ln^2 x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-9\ln^2 x}} \cdot \frac{-18\ln x}{x} = \frac{-3\ln x}{|\ln x|\sqrt{1-9\ln^2 x}\cdot x} = -\frac{3\,\mathrm{sgn}(\ln x)}{x\sqrt{1-9\ln^2 x}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln x \leq 0 \Longrightarrow \{f' \geq 0\} = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, 1\right] \Longrightarrow$$

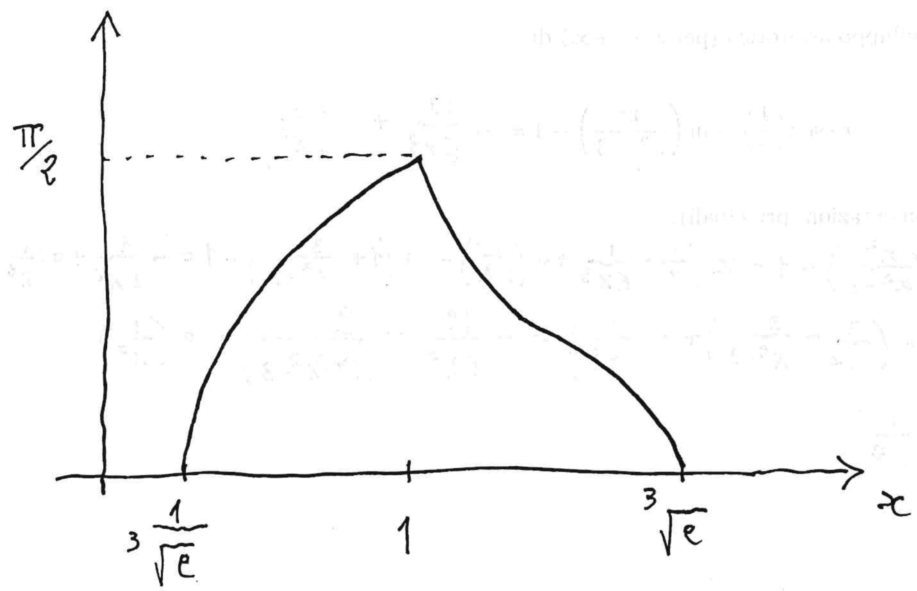
f è crescente su $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, 1\right]$, f è decrescente su $\left[1, \sqrt[3]{e}\right]$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- Punti di minimo assoluto: $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $x = \sqrt[3]{e}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = f(\sqrt[3]{e}) = 0$
- Punto di massimo assoluto: $x = 1$, $f(1) = \frac{\pi}{2}$

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln(1+x^2)}\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln(1+x^2)}\, dx \sim \int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln(x^2)}\, dx \sim \int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln x}\, dx$$

i) se $\alpha > 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln x} = +\infty \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln x}\, dx$ diverge a $+\infty \Rightarrow I$ è divergente a $+\infty$

ii) se $\alpha = 0$ $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx > \int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ che è divergente a $+\infty \Rightarrow I$ è divergente a $+\infty$

iii) se $\alpha < 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{\alpha x}}{\ln x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{\alpha x}}{\ln x} = 0$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ convergente $\Rightarrow$

$\int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln x}\, dx$ convergente $\Rightarrow I$ convergente

i), ii), iii) $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln(1+x^2)}\, dx$ è $\begin{cases} \text{divergente a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 0 \\ \text{convergente se } \alpha < 0 \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{y}{x} + \ln x, \qquad x > 0. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) = c\, e^{\int \frac{1}{x} dx} = c\, e^{\ln x} = cx, \quad x > 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) = x\left[c + \int e^{-\ln x} \cdot \ln x\, dx\right] = x\left[c + \int \frac{\ln x}{x} dx\right] = x\left[c + \frac{\ln^2 x}{2}\right]$$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{y}{x} + \ln x, & x > 0, \\ y(1) = e, \end{cases}$$

$$\psi(x) = x\left[e + \frac{\ln^2 x}{2}\right]$$

$$e = \psi_c(1) = 1\,[c + 0] = c \Rightarrow c = e$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico: $\lambda^2 - 4\lambda + 13$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$

$$\phi(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)\right)$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 13y = -27\, e^{2x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K e^{2x}$

$\Psi'(x) = 2K e^{2x}$, $\Psi''(x) = 4K e^{2x}$, $\Psi''(x) - 4\Psi'(x) + 13\Psi(x) =$

$= e^{2x}(4K - 8K + 13K) = 9Ke^{2x} \Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3)

$\Leftrightarrow K = -3$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = -3e^{2x}$

$$\psi(c_1, c_2; x) = \Psi(x) + \phi(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left(-3 + c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)\right)$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = -27\, e^{2x}, \\ y(0) = 6, \qquad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\psi'(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left((2c_1 + 3c_2)\cos(3x) + (2c_2 - 3c_1)\operatorname{sen}(3x) - 6\right)$

$6 = \psi(c_1, c_2; 0) = -3 + c_1 \Rightarrow c_1 = 9$

$0 = \psi'(c_1, c_2; 0) = 2c_1 + 3c_2 - 6 = 18 + 3c_2 - 6 = 12 + 3c_2 \Rightarrow c_2 = -4$

$$\psi(x) = e^{2x}\left(-3 + 9\cos(3x) - 4\operatorname{sen}(3x)\right)$$