IV APPELLO di
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2023/2024, 17 Settembre 2024

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

ESERCIZIO 1. [*3 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{1/n} + (-1)^n \ln n}{n^{3/2} + n \ln n}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\boxed{\text{assolutamente e dunque anche semplicemente convergente.}}$

- Convergenza assoluta: $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{e^{1/n} + (-1)^n \ln n}{n^{3/2} + n \ln n} \right|$ si comporta come $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2} + n \ln n}$ che ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ che è convergente per confronto asintotico con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}}$, con $1 < \gamma < 3/2$: $\lim_n \frac{\frac{\ln n}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{\gamma}}} = \underbrace{\lim_n \frac{\ln n}{n^{(3/2-\gamma)}}}_{} = 0$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma}}$ è convergente anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ è convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} + (-1)^n \ln n}{n^{3/2} + n \ln n}$ è

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \geq 0$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{1 + \sqrt{\sinh(x^{2\alpha})} - \exp(x^2)}{\sqrt{e - \exp(\cos(x^\alpha))}}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$1 + \sqrt{\sinh(x^{2\alpha})} - \exp(x^2) = \begin{cases} \sqrt{\sinh(1)} + o(1) & \text{se } \alpha = 0 \\ x^{\alpha} + o(x^{\alpha}) & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ -\frac{x^2}{2} + o(x^2) & \text{se } \alpha = 2 \\ -x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

e di:

$$\sqrt{e - \exp(\cos(x^\alpha))} = \begin{cases} \sqrt{e - e^{(\cos 1)}} + o(1) & \text{se } \alpha = 0 \\ \sqrt{\frac{e}{2}}\, x^{\alpha} + o(x^{\alpha}) & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

(fornendo le argomentazioni principali).

- $1 + \sqrt{\sinh(x^{\alpha})} - e^{(x^2)} = 1 + \sqrt{x^{(2\alpha)} + \frac{x^{(6\alpha)}}{6} + o(x^{(6\alpha)})} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) =$

$= x^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{x^{(4\alpha)}}{6} + o(x^{4\alpha})} - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^{\alpha}\left(1 + \frac{x^{(4\alpha)}}{12} + o(x^{(4\alpha)})\right) - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$\left(\sqrt{1+y} = 1 + y/2 + o(y) \right)$

$= x^{\alpha} - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^{(4\alpha)}) + o(x^4)$, se $\alpha > 0$.

- $\sqrt{e - e^{(\cos(x^\alpha))}} = \sqrt{e\left(1 - e^{(\cos(x^\alpha) - 1)}\right)} = \sqrt{e}\sqrt{-(\cos(x^\alpha) - 1) + o(\cos(x^\alpha) - 1)} =$

$= \sqrt{e}\sqrt{\frac{x^{(2\alpha)}}{2} + o(x^{(2\alpha)})} = \sqrt{\frac{e}{2}}\, x^{\alpha} + o(x^{\alpha})$ se $\alpha > 0$.

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\operatorname{senh}(1)}{e - e^{(\cos 1)}}} & se\ \alpha = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{e}} & se\ 0 < \alpha < 2 \\ 0 & se\ \alpha = 2 \\ -\infty & se\ \alpha > 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*8 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{2e^x - e^{2x} + 3}{|3 - e^x|} = \dfrac{(3-e^x)(e^x+1)}{|3-e^x|} = (e^x+1)\cdot \operatorname{sgn}(3-e^x)$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$

(ii) Determinare l'insieme di non negatività della funzione.

$\{f \geq 0\} =]-\infty, \ln 3[$

$f(x) \geq 0 \iff 2e^x - e^{2x} + 3 \geq 0$

$z = e^x,\ -z^2 + 2z + 3 \geq 0,\ z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4}}{-1} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \iff -1 \leq e^x \leq 3$

$\iff x \leq \ln 3$

(iii) Determinare le equazioni di eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui.

- $\lim_{x \to \ln 3^+} f(x) = -4$, $\lim_{x \to \ln 3^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} -\dfrac{(e^x+1)}{x} = -\infty \Rightarrow \nexists$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} = 1 \Rightarrow y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

(iv) Calcolare la derivata prima della funzione

$f'(x) = \operatorname{sgn}(3 - e^x) \cdot e^x$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$\{f' \geq 0\} =]-\infty, \ln 3[\Rightarrow f$ è crescente su $]-\infty, \ln 3[$

f è decrescente su $]\ln 3, +\infty[$

(v) Calcolare la derivata seconda della funzione

$f''(x) = \operatorname{sgn}(3 - e^x) \cdot e^x$

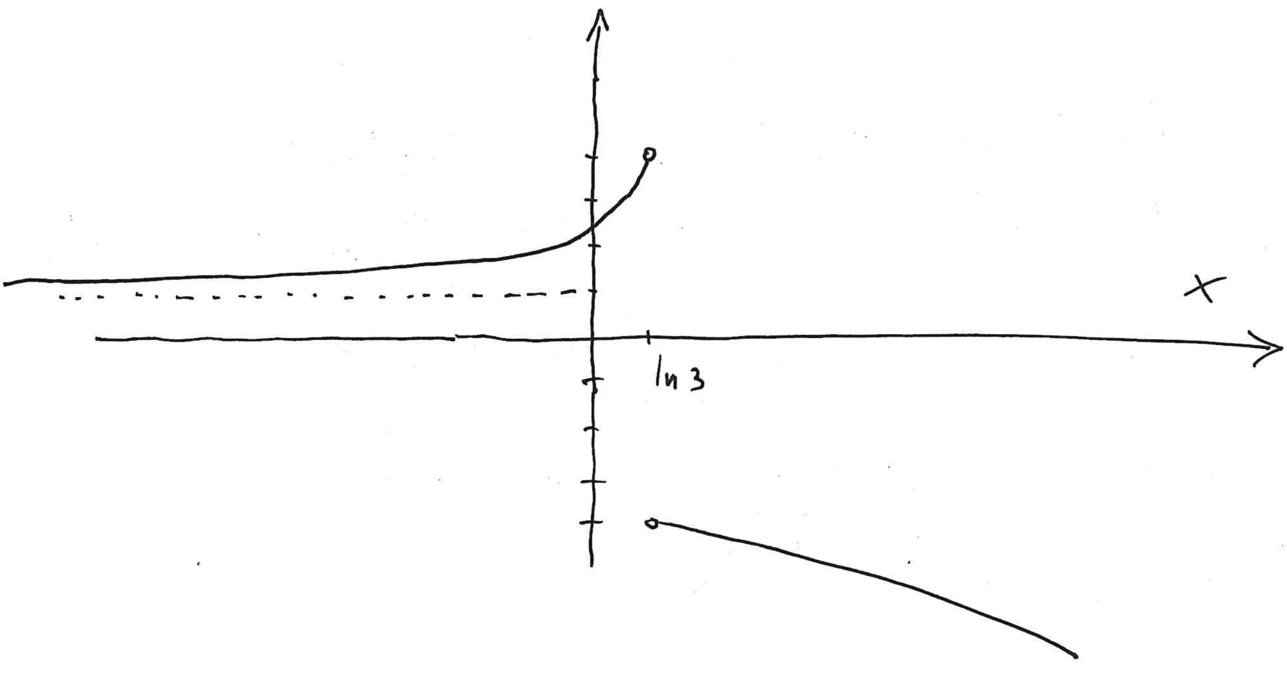
e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

$\{f'' \geq 0\} =]-\infty, \ln 3[\Rightarrow f$ è convessa su $]-\infty, \ln 3[$

f è concava su $]\ln 3, +\infty[$

(vi) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, -4[\cup]1, 4[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{\ln x}}\,dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_1^{2} \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{\ln x}}\,dx, \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$$

i) $I_1 \sim \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{1+(x-1)}}\,dx \sim \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)}}$ che è convergente e

$\Rightarrow I_1$ è convergente $\forall \alpha$

ii) $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x^{-\alpha})\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$ che è $\begin{cases} \text{convergente se } -\alpha > 1 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ se } -\alpha \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I_2$ è $\begin{cases} \text{convergente se } \alpha < -1 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ se } \alpha \geq -1 \end{cases}$

i) e ii) $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < -1 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq -1 \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{(1+\operatorname{sen} x - \cos x)}{(1+\operatorname{sen} x)}\,y + e^x \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata a (1):

$$\varphi_c(x) = c\,e^{\int \frac{1+\operatorname{sen}x - \cos x}{1+\operatorname{sen}x}dx} = c\,e^{\int \left(1 - \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}\right)dx} = c\,e^{(x - \ln(1+\operatorname{sen}x))} = \frac{e^x \cdot c}{1+\operatorname{sen}x}, \; c \in \mathbb{R}$$

- Integrale generale di (1):

$$\varphi_c(x) = \frac{e^x}{1+\operatorname{sen}x}\left(c + \int e^{(\ln(1+\operatorname{sen}x) - x)} \cdot e^x\,dx\right) = \frac{e^x}{1+\operatorname{sen}x}\left(c + \int (1+\operatorname{sen}x)\,dx\right) = \frac{e^x(c+x-\cos x)}{1+\operatorname{sen}x}$$

$c \in \mathbb{R}$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = \frac{(1+\operatorname{sen}x - \cos x)}{(1+\operatorname{sen}x)}\,y + e^x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$$1 = \varphi_c(0) = \frac{c-1}{1} \Rightarrow c = 2$$

$$\varphi(x) = \frac{e^x(2+x-\cos x)}{1+\operatorname{sen}x}$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = P(\lambda)$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$

$\phi(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 5\,e^{2x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

- Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = k e^{2x}$

$\Psi'(x) = 2ke^{2x}, \quad \Psi''(x) = 4ke^{2x}$

$\Psi''(x) - 4\Psi'(x) + 5\Psi(x) = e^{2x}(4k - 8k + 5k) = ke^{2x}$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di $(3) \Leftrightarrow k = 5 \Rightarrow \Psi(x) = 5e^{2x}$

$\psi(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 5\right)$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 5\,e^{2x}, \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 5. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left(2c_1 \cos x + 2c_2 \operatorname{sen} x + 10 - c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x\right)$

$= e^{2x}\left((2c_1 + c_2)\cos x + (2c_2 - c_1)\operatorname{sen} x + 10\right)$

$0 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + 5 \Rightarrow c_1 = -5; \quad 5 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = 2c_1 + c_2 + 10 = -10 + c_2 + 10 = c_2$

$\psi(x) = e^{2x}\left(-5\cos x + 5 \operatorname{sen} x + 5\right) = 5e^{2x}\left(-\cos x + \operatorname{sen} x + 1\right)$