

# IV APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)  
A.A. 2023/2024, 17 Settembre 2024

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: .....

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

**ESERCIZIO 1.** [3 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{1/n} + (-1)^n \ln n}{n^{3/2} + n \ln n}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

**ESERCIZIO 2.** [7 punti] Studiare al variare del parametro  $\alpha \geq 0$  il limite  $\ell_\alpha \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{\sinh(x^{2\alpha})} - \exp(x^2)}{\sqrt{e - \exp(\cos(x^\alpha))}}$ .

Determinare lo sviluppo asintotico (per  $x \rightarrow 0$ ) di:

$$1 + \sqrt{\sinh(x^{2\alpha})} - \exp(x^2) =$$

e di:

$$\sqrt{e - \exp(\cos(x^\alpha))} =$$

(fornendo le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$$\ell_\alpha =$$

**ESERCIZIO 3.** [8 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \frac{2e^x - e^{2x} + 3}{|3 - e^x|}$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare l'insieme di non negatività della funzione.

$$\{f \geq 0\} =$$

(iii) Determinare le equazioni di eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui.

(iv) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(v) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

(vi) Determinare l'immagine di  $f$  :  $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

**ESERCIZIO 4.** [6 punti] Studiare al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{\ln x}} dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

**ESERCIZIO 5.** [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{(1 + \operatorname{sen} x - \cos x)}{(1 + \operatorname{sen} x)} y + e^x \quad (1)$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

(ii) Determinare la soluzione  $x \mapsto \varphi(x)$  del problema di Cauchy 
$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{(1 + \operatorname{sen} x - \cos x)}{(1 + \operatorname{sen} x)} y + e^x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\varphi(x) =$$

**ESERCIZIO 6.**

- (i) [2 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\phi(c_1, c_2; x) =$$

- (ii) [2.5 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 5e^{2x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(c_1, c_2; x) =$$

- (iii) [1.5 punti] Determinare la soluzione  $\psi$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 5e^{2x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 5. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(x) =$$