Es 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\left(\frac{\ln n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

converge semplicemente per criterio di Leibnitz per serie a termini di segno alterno, poichè $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_n$ è decrescente ($n>1$) infinitesima.

La serie non converge assolutamente poichè $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serie armonica, divergente a $+\infty$,

e dunque anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ è divergente a $+\infty$

Es. 2 $\ln\left(\sqrt{x+9}-2\right)=\ln\left(3\sqrt{1+\frac{x}{9}}-2\right)=\ln\left(3\left(1+\frac{x}{18}+o(x)\right)-2\right)$

$=\ln\left(\frac{x}{6}+o(x)\right)=\frac{x}{6}+o(x)$ per $x\to 0$

$$e^{\frac{\alpha}{x}}-1+\operatorname{sen}(2x)=\begin{cases}2x+o(x) & \text{per } x\to 0 \quad \text{se } \alpha=0\\ e^{\alpha/x}+o\left(e^{\alpha/x}\right) & \text{per } x\to 0^+ \quad \text{se } \alpha>0\\ -1+o(1) & \text{per } x\to 0^+ \quad \text{se } \alpha<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \ell_\alpha=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sqrt{x+9}-2\right)}{e^{\alpha/x}-1+\operatorname{sen}(2x)}=\begin{cases}1/12 & \text{se } \alpha=0\\ 0 & \text{se } \alpha\neq 0\end{cases}$$

Es. 3 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x$

i) $\operatorname{Dom}(f)=\,]0,+\infty[$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \Rightarrow \boxed{y=0 \text{ asintoto verticale}}$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)+x=0$

$\Rightarrow \boxed{y=-x \text{ asintoto obliquo per } x\to+\infty}$

iii) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} - 1 = \dfrac{1-\ln x - x^2}{x^2}$

$f'(x) \geq 0 \iff 1-\ln x - x^2 \geq 0$. Poniamo $g(x) = 1-\ln x - x^2$

Notiamo $g(1) = 0$, $x > 1 \Rightarrow 1-x^2 < 0,\ -\ln x < 0$

$\Rightarrow g(x) < 0$

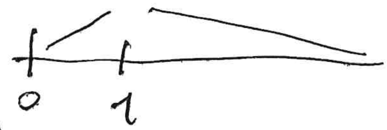
$0 < x < 1 \Rightarrow 1-x^2 > 0,\ -\ln x > 0 \Rightarrow g(x) > 0$

$\Rightarrow \{f' \geq 0\} =]0,1] \Rightarrow$ f è crescente su $]0,1]$,

f è decrescente su $[1,+\infty[$

iv) $x = 1$ punto di massimo assoluto

$\nexists$ punti di minimo relativo o assoluto



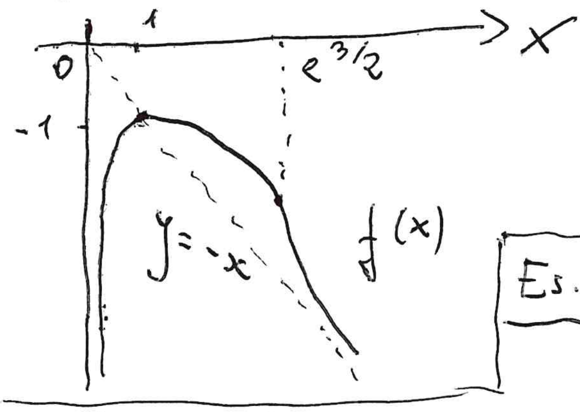
v) $f''(x) = \dfrac{-x + (\ln x - 1)2x}{x^4} = \dfrac{x(2\ln x - 3)}{x^4}$

$f''(x) \geq 0 \iff 2\ln x - 3 \geq 0 \iff \ln x \geq \frac{3}{2} \iff x \geq e^{3/2}$

$\Rightarrow$ f è convessa su $[e^{3/2}, +\infty[$

f è concava su $]0, e^{3/2}]$

$x = e^{3/2}$ è punto di flesso



$\mathrm{Im}(f) =]-\infty, f(1)] =]-\infty, -1]$

Es. 4 $f(x) = \displaystyle\int_{e^{-x}}^{e^{x}} \frac{1}{\ln(1+t)}\, dt$

i) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x} \iff x \geq 0$

$\Rightarrow \{f \geq 0\} = [0, +\infty[$

ii) $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^x}{\ln(1+e^x)} + \dfrac{e^{-x}}{\ln(1+e^{-x})} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ è crescente su } \mathbb{R}}$

Es. 5 $\quad y' = e^x \sqrt{1-y^2}$

i) Soluzioni costanti: $\boxed{\varphi_1(x) = 1, \ \varphi_2(x) = -1, \ x \in \mathbb{R}}$

Soluzioni non costanti:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \int e^x\, dx \Rightarrow \arcsin(y) = e^x + c, \quad |e^x + c| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{sen}(e^x + c), \quad \boxed{\varphi_3(x;c) = \operatorname{sen}(e^x + c), \ |e^x + c| \leq \frac{\pi}{2}}$$

ii) Problema di Cauchy $\quad y' = e^x \sqrt{1-y^2}, \quad y(\ln \pi) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \varphi_3(\ln \pi; c) = \operatorname{sen}(e^{\ln \pi} + c) = \operatorname{sen}(\pi + c)$$

$$\Rightarrow c = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(x) = \operatorname{sen}\left(e^x - \frac{\pi}{2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq e^x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^x \leq \pi \iff x \leq \ln \pi \Rightarrow$$

$\boxed{\varphi(x) = \operatorname{sen}\left(e^x - \frac{\pi}{2}\right), \ x \leq \ln \pi}$ è la soluzione del Problema di Cauchy.