Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

ASPETTI MATEMATICI E FISICI DELLA CONVEZIONE TERMICA DI BÉNARD-RAYLEIGH

Tesi di Laurea in Meccanica dei Continui

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Franca FRANCHI

Presentata da:
Michele ANTONELLI

1ª Sessione
Anno Accademico 2008-2009

Indice

Introduzione

In questa tesi sono trattati alcuni aspetti fisici e matematici del problema di convezione termica di Bénard-Rayleigh per fluidi viscosi e per mezzi porosi. In particolare, accanto alla formulazione del problema classico, sono riportate anche sue interessanti generalizzazioni. Gli strumenti matematici utilizzati sono quelli usualmente adottati nello studio della stabilità lineare e non lineare dei moti fluidi e consistono rispettivamente nel metodo dei modi normali o di Fourier e nel metodo dell'energia o di Lyapunov.

Analizziamo nel dettaglio la struttura dei vari capitoli. Il capitolo 1 è dedicato alla presentazione della teoria classica di Navier-Stokes-Fourier per fluidi viscosi e alla derivazione delle equazioni approssimate di Oberbeck-Boussinesq. Il capitolo 2 è concentrato sulla discussione del problema della convezione termica in uno strato orizzontale di fluido viscoso, riscaldato dal basso, e presenta una analisi dettagliata dello studio della stabilità lineare e non lineare della soluzione stazionaria, nota come soluzione di conduzione stazionaria. La discussione è mirata a trovare le condizioni (sufficienti) per l'insorgenza di moti convettivi instabili. Entrambe le indagini conducono ad un problema agli autovalori per la determinazione di tali condizioni critiche. La validità del principio dello scambio delle stabilità consente di lavorare con la convezione stazionaria, e si trova per il problema di Bénard la situazione ottimale per cui, alla criticalità, i parametri critici per la stabilità lineare e non lineare coincidono. Vengono poi presentate due generalizzazioni del modello classico, molto importanti per le applicazioni, sia in ambito fisico che astrofisico, che includono nell'analisi rispettivamente la presenza di una sorgente di calore (costante) interna allo strato e di un campo gravitazionale variabile con la quota z. Pensando alle tante interessanti applicazioni, il capitolo 3 è dedicato ai mezzi porosi: dopo aver richiamato alcune nozioni e notazioni fondamentali per la teoria, si sono elencati i diversi modelli matematici che ne descrivono il comportamento, a partire dalla classica equazione (parabolica) di Darcy; si sono così trovate le equazioni di Forchheimer e di Brinkman. Inoltre, abbiamo derivato anche le equazioni che governano la temperatura e la concentrazione di un ingrediente chimico, quale per esempio un sale, importanti per la formulazione di problemi convettivi e/o diffusivi associati al modello poroso. Infine nel capitolo 4 abbiamo affrontato il problema della convezione termica in un mezzo poroso saturato da un fluido. In particolare, abbiamo ristretto la descrizione della stabilità lineare e non lineare alle equazioni approssimate di Boussinesq associate al modello base di Darcy, evidenziando per gli altri modelli le differenze o le analogie con i risultati ottenuti. In conclusione, abbiamo voluto presentare la situazione fisica in cui lo strato orizzontale ruota intorno ad un asse verticale, e abbiamo messo in evidenza l'effetto stabilizzante di tale rotazione. Per completezza, si riportano in appendice alcune identità e disuguaglianze utili, più volte richiamate nel testo.

Si è scelto di trattare questi argomenti per la loro rilevanza e attualità in ambito di ricerca, e per le interessanti applicazioni che le generalizzazioni dei modelli matematici presentati incontrano nei campi più vari, per esempio in geofisica e geologia, astrofisica, biochimica, edilizia.

Notazioni

Si utilizzeranno le notazioni usuali della fisica matematica, ovvero le notazioni simboliche standard per vettori e tensori e quella indiciale, adottata ove risulta più conveniente, accanto alla convenzione di Einstein nelle sommatorie. Indichiamo la derivata parziale rispetto al tempo con $u_t = u_{,t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, la derivata totale (o materiale o lagrangiana) con $\dot{u} = \frac{du}{dt} = \nabla u \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial u}{\partial t}$ oppure $\dot{u}_i = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t}$, il gradiente ∇u di un campo scalare come vettore di componenti $(\nabla u)_j = u_{,j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ e gradiente $\nabla \mathbf{u}$ di un campo vettoriale come matrice di elementi $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, la divergenza $\nabla \cdot u = u_{i,i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, il laplaciano $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $(\Delta \mathbf{u})_i = \Delta u_i$.

Denoteremo con Ω un dominio dello spazio tridimensionale euclideo $\mathbb{R}^3$ fissato, limitato in almeno una direzione e avente frontiera $\partial\Omega$, sufficientemente regolare da permettere l'applicazione del teorema della divergenza. Nei problemi di convezione che si tratteranno studieremo il moto di un fluido in uno strato orizzontale piano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} \times \{z \in (0, d)\}$, assumendo che le funzioni coinvolte abbiano un comportamento ripetitivo in (x, y)[1]. Ciò porta a definire una cella di periodicità V come il prodotto cartesiano di tale forma che tassella il piano con $(0, d)$; il bordo di tale cella si indicherà con ∂V.

Lavoreremo negli spazi di Hilbert $L^2(\Omega)$ o $L^2(V)$ reali (si considererà il caso complesso solo nella dimostrazione della validità del principio dello scambio delle stabilità), e indicheremo con

$$\|f\|^2 = \int_V f^2 \, dV \qquad\qquad \langle f, g\rangle = < fg > = \int_V fg \, dV$$

rispettivamente la norma e il prodotto scalare definiti su tali spazi.

Rimandiamo all'appendice A per un elenco di identità e disuguaglianze utili a cui si farà riferimento nel testo; in alcuni casi si riporteranno anche brevi dimostrazioni della validità di tali relazioni.

[1] Come si vedrà più avanti, tale assunzione è giustificata da osservazioni sperimentali.

Capitolo 1

Equazioni di Navier-Stokes e approssimazione di Boussinesq

1.1 Modello di Navier-Stokes-Fourier

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio limitato, con frontiera sufficientemente regolare, fisso, riempito da un fluido viscoso newtoniano, omogeneo, incompressibile[1]. Consideriamo l'intervallo temporale $[0, \mathcal{T})$ con $\mathcal{T} \in (0, \infty)$.
Per un fluido isotermo, l'evoluzione nel tempo del campo di velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e della pressione $p = p(\mathbf{x}, t)$ è data dalle equazioni di *Navier-Stokes*:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \end{cases} \tag{1.1}$$

dove ρ è la densità (costante) del fluido, $\nu = \frac{\mu}{\rho} > 0$, costante, è la viscosità cinematica, $\mathbf{f}$ è il campo di forze esterno per unità di massa.
Come è noto, la $(1.1)_1$ è la forma che in questo caso particolare assume l'equazione di continuità (che traduce localmente il principio di conservazione della massa) e la $(1.1)_2$ (detta equazione di Eulero) esprime la conservazione della quantità di moto, in forma locale.

Al sistema (1.1) si devono aggiungere le seguenti condizioni iniziali e al contorno

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) & \text{per } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, \mathcal{T}) \end{array} \tag{1.2}$$

dove $\mathbf{v}_0$ e $\hat{\mathbf{v}}$, rispettivamente distribuzione iniziale di velocità e velocità sul bordo, sono assegnate.

[1]Si ricorda che un fluido si definisce *newtoniano* se gli sforzi sono direttamente proporzionali alla velocità di deformazione.

Per una discussione della stabilità non lineare della soluzione nulla, o di un moto stazionario, facendo uso del metodo dell'energia si veda per esempio [7].

1.1.1 Bilancio dell'energia

Quando si studia il moto di un fluido causato da forze di spinta come quelle dovute al riscaldamento dal basso, alle equazioni del moto (1.1) bisogna aggiungere l'equazione che descrive l'evoluzione del campo (scalare) di temperatura $T(\mathbf{x}, t)$. Tale equazione si ottiene dal bilancio dell'energia calorica (primo principio della termodinamica):

$$\rho\,\dot{e} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho\, r \tag{1.3}$$

dove e è la densità di energia interna, $\mathbf{T}$ il tensore degli sforzi di Cauchy (simmetrico, per il teorema di Cauchy[2]), $\mathbf{q}$ il vettore flusso di calore, $r = r(\mathbf{x}, t)$ il supply di calore, dovuto alla presenza di sorgenti all'interno dell'elemento di fluido considerato.
Alla (1.3) si devono poi aggiungere le equazioni costitutive per $\mathbf{T}$ e $\mathbf{q}$.

Prima di procedere riteniamo opportuno riportare due tra le relazioni più usate in fisica matematica, e di cui ci serviremo nel seguito.

Teorema 1.1 (del trasporto di Reynolds)**.**
Sia $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regolare nel senso di Kellogg, e $f(\mathbf{x}, t)$ un campo scalare (o vettoriale) regolare in questa regione. Allora $\forall\, t$ vale

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} f(\mathbf{x}, t)\, dx = \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{df}{dt} + f\, \nabla \cdot \mathbf{v}\right) dx = \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{v} + f\, \nabla \cdot \mathbf{v}\right) dx$$

dove $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ è il campo (euleriano) di velocità e $\mathcal{P}_t \subset \Omega_t$ è una qualunque parte regolare.
Se $f(\mathbf{x}, t)$ è un campo scalare per unità di massa e vale la forma differenziale del principio di conservazione della massa, sussiste la seguente formulazione del teorema:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \rho\, f\, dx = \int_{\mathcal{P}_t} \rho\, \frac{df}{dt}\, dx$$

per ogni porzione $\mathcal{P}_t \subset \Omega_t$ del dominio, dove ρ è la densità di massa.

[2] Cfr. per esempio [3].

Teorema 1.2 (della divergenza)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un sottoinsieme compatto, con frontiera regolare a tratti. Se* $\mathbf{f}$ *è un campo vettoriale di classe* C^1 *definito su un aperto del dominio* Ω*, allora vale*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{f}\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

dove $\mathbf{n}$ *è il campo normale unitario esterno alla superficie* $\partial\Omega$*, bordo di* Ω*.*

Risultato 1.1. Ricaviamo l'equazione (1.3) a partire dal primo principio della termodinamica.

Dimostrazione. Sia Ω il nostro dominio spaziale e $\mathcal{P}_t \subset \Omega$ una sua qualsiasi parte regolare. Il *primo principio della termodinamica* può essere espresso nella forma

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P + Q \tag{1.4}$$

dove:

$$E = E(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho\, e(\mathbf{x}, t)\, dx$$

è l'*energia interna* della parte $\mathcal{P}_t$, con densità specifica per unità di massa $e(\mathbf{x}, t)$,

$$K = K(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho\, \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}\, dx$$

è l'*energia cinetica*, P è la *potenza meccanica* delle forze e

$$Q = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \int_\Omega \rho\, r\, dx$$

detto *calorico*, con $\mathbf{q}$ *vettore flusso di calore* e $r = r(\mathbf{x}, t)$ *supply di calore* (noto), rappresenta la potenza termica, dovuta alla conduzione superficiale e all'irraggiamento.
Considerando l'equazione locale del moto

$$\rho\, \dot{\mathbf{v}} = \rho\, \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \tag{1.5}$$

e moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ si ottiene

$$\rho\, \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \rho\, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) - \mathbf{T} \cdot \nabla\mathbf{v} \tag{1.6}$$

in quanto $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}^2}{2}$, $\mathbf{T}$ simmetrico, $\nabla\mathbf{v}$ lineare e si è tenuto conto dell'identità $(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) - \mathbf{T} \cdot \nabla\mathbf{v}$.

Introducendo il *tensore velocità di deformazione* $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$ (parte simmetrica del gradiente di velocità) e integrando (1.6) su $\mathcal{P}_t$, risulta

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}^2}{2}\, dx = \int_{\mathcal{P}_t} \rho\, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx + \int_{\mathcal{P}_t} \nabla \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v})\, dx - \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\, dx$$

da cui, in virtù del teorema del trasporto, e applicando il teorema della divergenza al secondo termine del secondo membro, tenendo conto anche della simmetria di T, si ottiene

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2}\, dx = \int_{\mathcal{P}_t} \rho\, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\, d\sigma - \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\, dx \tag{1.7}$$

Dalla definizione di energia cinetica K e inglobando in un unico termine di potenza meccanica P i primi due termini al secondo membro (rispettivamente, potenza delle forze esterne e potenza degli sforzi superficiali), la (1.7) può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt}K = P - \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\, dx \qquad \forall \mathcal{P}_t \subset \Omega \tag{1.8}$$

che rappresenta il teorema dell'energia cinetica.
Tenendo conto delle definizioni precedentemente date e della (1.8), la (1.4) si scrive in modo esteso come

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \rho\, e\, dx + P - \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\, dx = P - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \int_{\Omega} \rho\, r\, dx$$

Sfruttando ancora i teoremi 1.1 (sul primo termine) e 1.2 (sul termine contenente il flusso di calore $\mathbf{q}$), portando tutto al primo membro e sotto un unico integrale, risulta subito:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \left(\rho \frac{de}{dt} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho\, r \right) dx \;=\; 0 \qquad \forall \mathcal{P}_t$$

Poiché risulta che l'integrale è nullo per qualsiasi porzione $\mathcal{P}_t$ (del tutto arbitraria), per il lemma fondamentale della Meccanica dei Continui si ottiene la forma locale

$$\rho\, \dot{e} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho\, r = 0$$

che è proprio la (1.3). □

1.1.2 Principio dell'entropia

Alle equazioni (1.1) e (1.3) occorre aggiungere il principio dell'entropia (o secondo principio della termodinamica), espresso nella forma della disuguaglianza di *Clausius-Duhem* (in forma differenziale):

$$-\rho\,(\dot{\psi} + \dot{T}\,\eta) + \mathbf{T}\cdot\mathbf{D} - \frac{1}{T}\nabla T\cdot\mathbf{q} \,\geq\, 0 \tag{1.9}$$

dove ψ è l'energia libera e η è la densità specifica di entropia per unità di massa.

Risultato 1.2. Ricaviamo l'equazione (1.9) a partire dalla formulazione integrale del secondo principio della termodinamica.

Dimostrazione. Con le stesse notazioni usate prima, il *secondo principio della termodinamica* può essere espresso in forma integrale come

$$\frac{d}{dt}H \geq -\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{q}_\eta\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \int_{\mathcal{P}_t} \rho\, r_\eta\, dx \tag{1.10}$$

dove:

$$H = H(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho\,\eta(\mathbf{x},t)\,dx$$

è l'*entropia*, con densità specifica $\eta(\mathbf{x},t)$,

$$\mathbf{q}_\eta = \frac{\mathbf{q}}{T}$$

è il *flusso di entropia*,

$$r_\eta = \frac{r}{T}$$

è il *supply di entropia*, seguendo i dettami della termodinamica classica dell'equilibrio.

Scriviamo la (1.10) in forma estesa, tenendo conto delle definizioni appena date:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \rho\,\eta\,dx \geq -\int_{\partial\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{q}}{T}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \int_{\mathcal{P}_t} \rho\,\frac{r}{T}\,dx \qquad \forall\mathcal{P}_t$$

Ricorrendo ai teoremi 1.1, 1.2, si ha la possibilità di scrivere sotto un unico integrale al primo membro

$$\int_{\mathcal{P}_t} \left(\rho\,\frac{d\eta}{dt} + \nabla\cdot\frac{\mathbf{q}}{T} - \rho\,\frac{r}{T}\right) dx \,\geq\, 0 \qquad \forall\mathcal{P}_t$$

da cui, facendo uso di una nota identità (cfr. elenco nell'appendice A), discende la forma locale

$$\rho T\dot{\eta} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{T}\nabla T \cdot \mathbf{q} - \rho r \geq 0 \tag{1.11}$$

Dalla (1.3) si ha $\nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{e}$, così la (1.11) diventa

$$\rho (T\dot{\eta} - \dot{e}) + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{T}\nabla T \cdot \mathbf{q} \geq 0$$

Introducendo poi l'*energia libera*

$$\psi = e - T\eta$$

e osservando che $T\dot{\eta} - \dot{e} = -(\dot{\psi} + \dot{T}\eta)$, si arriva proprio alla (1.9). □

Osservazione 1. La disuguaglianza (1.9) di Clausius-Duhem, espressa in termini dell'energia interna specifica, incorpora il bilancio dell'energia e la conservazione della quantità di moto.

1.2 Approssimazione di Oberbeck-Boussinesq

In questa sezione introdurremo lo schema noto come *approssimazione di Oberbeck-Boussinesq* utile per semplificare in molti casi il sistema di equazioni che governa il problema di convezione termica, ovvero l'evoluzione di un fluido (in generale compressibile) soggetto a riscaldamento dal basso. Esso consiste nella seguente serie di assunzioni sul comportamento del fluido:

- la sola forza agente sul fluido è la forza di gravità;
- i moti convettivi sono di tipo isocorico;
- i gradienti di velocità sono abbastanza piccoli da ignorarne l'effetto sulla temperatura di conversione del lavoro in calore;
- le variazioni di densità sono dovute a variazioni di temperatura, ma non di pressione;
- i coefficienti presenti sono costanti positive;
- le accelerazioni promosse nel fluido a causa delle variazioni di densità sono più piccole di quelle relative all'accelerazione di gravità.

1.2.1 Equazione di stato

L'ipotesi che il fluido sia leggermente comprimibile permette di trattare la densità come costante dappertutto, tranne che nel termine $\rho\,\mathbf{f}$ dovuto alle forze esterne (nel nostro caso, solo la forza peso), dove l'accelerazione dovuta a tali forze può essere sufficientemente grande e quindi non trascurabile. Pertanto nell'approssimazione di Boussinesq si suppone per la densità una dipendenza dalla temperatura soltanto nel termine $\rho\,\mathbf{f}$, cioè

$$\rho\,\mathbf{f} = -\rho(T)g\mathbf{k} \tag{1.12}$$

con g accelerazione di gravità e $\mathbf{k} = (0,0,1)$ versore nella direzione verticale, assumendo per $\rho(T)$ la seguente equazione di stato lineare:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \tag{1.13}$$

dove $\rho_0 = \rho(T_0) > 0$ è la densità alla temperatura di riferimento $T_0 > 0$ e

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{T_0} > 0$$

è il coefficiente di espansione termica volumetrica.
Tale equazione è il risultato dello sviluppo in serie di Taylor della densità $\rho(T)$ attorno a T_0, troncato al termine di primo grado, cioè

$$\rho = \rho(T) = \rho(T_0) + \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{T_0}(T - T_0) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$$

1.2.2 Coefficienti costanti positivi

Alcune osservazioni sperimentali giustificano le assunzioni matematiche sui coefficienti che compaiono nelle equazioni.
Per il flusso di calore consideriamo la legge costitutiva classica di Fourier:

$$\mathbf{q} = -\chi\nabla T \tag{1.14}$$

dove $\chi \geq 0$ è il coefficiente di conducibilità termica.
Per un fluido *stokesiano lineare* il tensore degli sforzi di Cauchy è della forma Navier-Stokes:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \tag{1.15}$$

con $\mathbf{D}$ tensore velocità di deformazione e i coefficienti λ (viscosità di volume), μ (viscosità di scorrimento o shear) soddisfacenti le condizioni (termodinamiche):

$$3\lambda + 2\mu \geq 0 \quad , \quad \mu \geq 0$$

La (1.15) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\langle\mathbf{D}\rangle + \frac{3\lambda+2\mu}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{I} = -(p-\xi\,\nabla\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{I} + 2\mu\langle\mathbf{D}\rangle \quad (1.16)$$

dove $\mathbf{D} = \langle\mathbf{D}\rangle + \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{D})\,\mathbf{I}$ è stato decomposto nella somma delle parti deviatorica $\langle\mathbf{D}\rangle$ (a traccia nulla) e sferica, si è ricordato che vale $\operatorname{tr}(\mathbf{D}) = \nabla\cdot\mathbf{v}$ e si è posto $\xi = \frac{3\lambda+2\mu}{3}$ viscosità di profondità o bulk.

Osservazione 2. Dal primo termine $p - \xi\,\nabla\cdot\mathbf{v}$, si nota come la pressione originaria p venga diminuita a causa della viscosità bulk ξ.

I coefficienti $\alpha, \chi, \lambda, \mu, \xi$ sono in generale dipendenti da densità e temperatura (ρ, T); tuttavia nella maggioranza dei fluidi di interesse, variano di poco al variare della temperatura. Per i gas e i liquidi più comuni, per variazioni di temperatura che non superano i 10 K, il coefficiente di espansione volumetrica α è dell'ordine di $(10^{-4}, 10^{-3})$ e la conseguente variazione di densità è al più dell'1%; per effetto di questa variazione di densità, anche le variazioni negli altri coefficienti sono piccole. Pertanto, almeno in prima istanza, tratteremo tali quantità come costanti (e positive).

Come si osserva in [7], per l'acqua tra 0 °C e 100 °C il calore specifico c_p varia da 4.27 J g m^{-1} °C^{-1} a 4.216 J g m^{-1} °C^{-1} e il coefficiente di diffusività termica $\kappa = \frac{\chi}{c_p\rho_0}$ varia da 1.33×10^{-3} cm^2 s^{-1} a 1.66×10^{-3} cm^2 s^{-1}; è quindi ragionevole considerarli come costanti.
La variazione della viscosità cinematica ν al variare della temperatura è invece maggiore (da 1.787×10^{-2} cm^2 s^{-1} a 0.295×10^{-2} cm^2 s^{-1}): al momento consideriamo anch'essa costante, ma si noti che esistono situazioni (solitamente con temperature elevate, come in dinamica stellare) in cui l'andamento della viscosità è fortemente influenzato dalla temperatura (e.g. comportamento di tipo esponenziale, affrontato in [2]).

Ci proponiamo di mostrare la validità delle restrizioni termodinamiche su χ, μ, ξ, a partire dal principio dell'entropia.
A tale proposito premettiamo il seguente

Lemma 1.3 (di Coleman)**.**
Sia

$$\sum_{i=1}^{l} a_i y_i + b \geq 0$$

con y_i arbitrari e a_i non dipendenti da y_i. Allora valgono le seguenti condizioni

$$\begin{cases} b \geq 0 \\ a_i = 0 \quad \forall i = 1,\dots,l \end{cases}$$

Risultato 1.3. I coefficienti χ conducibilità termica, μ viscosità di scorrimento, ξ viscosità di profondità sono non negativi,

$$\chi, \mu, \xi \geq 0$$

Dimostrazione. Riconsideriamo la disequazione (1.9) di Clausius-Duhem:

$$-\rho\,(\dot{\psi} + \dot{T}\,\eta) + \mathbf{T}\cdot\mathbf{D} - \frac{1}{T}\nabla T\cdot\mathbf{q} \,\geq\, 0$$

In generale, per un fluido termo-viscoso classico secondo la teoria di Navier-Stokes-Fourier, l'energia libera può dipendere dalla densità, dalla temperatura, dal gradiente di temperatura e dal tensore velocità di deformazione, cioè $\psi = \psi(\rho, T, \nabla T, \mathbf{D})$.
Usando la regola di catena per la derivazione rispetto al tempo di ψ, vista come funzione composta, e sostituendo a $\mathbf{T}$ e $\mathbf{q}$ le rispettive equazioni costitutive (1.16) e (1.14), riscriviamo la disequazione precedente nella forma:

$$\begin{aligned} &-\rho\,\left(\psi_\rho\dot{\rho} + \psi_T\dot{T} + \psi_{\nabla T}\cdot(\dot{\nabla T}) + \psi_{\mathbf{D}}\cdot\dot{\mathbf{D}} + \dot{T}\eta\right) \\ &-p\,\nabla\cdot\mathbf{v} + 2\mu\langle\mathbf{D}\rangle^2 + \xi(\nabla\cdot\mathbf{v})^2 + \frac{\chi}{T}(\nabla T)^2 \,\geq\, 0 \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli, osservando che da $\dot{\rho} = -\rho\,\nabla\cdot\mathbf{v}$ risulta $\nabla\cdot\mathbf{v} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$ e raccogliendo opportunamente, si ottiene

$$\begin{aligned} -\rho\,(\psi_\rho - \frac{p}{\rho^2})\dot{\rho} - \rho\,(\psi_T + \eta)\dot{T} - \rho\,\psi_{\nabla T}\cdot(\dot{\nabla T}) - \rho\,\psi_{\mathbf{D}}\cdot\dot{\mathbf{D}} \\ +2\mu\langle\mathbf{D}\rangle^2 + \xi(\nabla\cdot\mathbf{v})^2 + \frac{\chi}{T}(\nabla T)^2 \,\geq\, 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Applicando il lemma 1.3 di Coleman alla (1.17) e ricordando che $\rho > 0$ si arriva alle seguenti condizioni sulla forma di ψ e sulle equazioni costitutive coinvolte:

$$\begin{cases} \begin{cases} \eta = -\psi_T \\ p = -\rho^2\psi_\rho \\ \mathbf{0} = \psi_{\nabla T} \\ \mathbf{0} = \psi_{\mathbf{D}} \end{cases} \\ \\ 2\mu\langle\mathbf{D}\rangle^2 + \xi(\nabla\cdot\mathbf{v})^2 + \frac{\chi}{T}(\nabla T)^2 \,\geq\, 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

Le $(1.18)_1$-$(1.18)_4$ permettono di affermare che l'energia libera dipende soltanto dalla densità e dalla temperatura $\psi = \psi(\rho, T)$.
Poiché la $(1.18)_5$, detta disuguaglianza di dissipazione ridotta, deve valere

per ogni processo termodinamico, scegliendone uno con solo contributo termico e uno con solo contributo meccanico (isotermo) si può separare nelle disugualianze

$$\begin{cases} 2\mu\langle\mathbf{D}\rangle^2 + \xi(\nabla\cdot\mathbf{v})^2 \geq 0 \\ \frac{\chi}{T}(\nabla T)^2 \geq 0 \end{cases}$$

da cui seguono le restrizioni termodinamiche cercate:

$$\begin{cases} \mu \geq 0 \quad \text{e} \quad \xi \geq 0 \\ \chi \geq 0 \end{cases}$$

□

1.2.3 Energia interna dipendente linearmente da temperatura

Nell'ambito della nostra approssimazione, consideriamo una variazione lineare dell'energia interna come funzione della temperatura, ovvero

$$e = e(T) = c_p T \tag{1.19}$$

dove c_p è il calore specifico a pressione costante.

1.2.4 Termini dovuti a dissipazione viscosa

Seguendo la descrizione fatta in [7], sfruttiamo ancora una volta un argomento sugli ordini di grandezza delle quantità in gioco per poter semplificare la forma assunta dalle equazioni che descrivono il sistema. In particolare, per numeri di Mach piccoli

$$M = \frac{V^2}{v_s^2} \ll 1$$

dove V è una velocità tipica del problema e v_s è la velocità del suono nel fluido, quando è compressibile ($\nabla\cdot\mathbf{v} \neq 0$) e barotropico[3], si possono trascurare i termini dovuti alla dissipazione viscosa, come $\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}$.
Questa supposizione sul numero di Mach equivale all'ipotesi che le velocità non siano troppo grandi (regime subsonico), la quale è sicuramente soddisfatta nei problemi di convezione di cui ci occuperemo[4].

[3] Per un fluido barotropico vale l'equazione di stato per la pressione $p = p(\rho)$. In questo caso il modello è di tipo iperbolico ed è possibile lo studio della propagazione ondosa nel mezzo (si veda [4]).

[4] Come riportato in [7], per aria e acqua a temperatura 15°C e pressione 1 atm si ha rispettivamente $v_s^{\text{aria}} = 340.6$ m s^{-1} e $v_s^{\text{acqua}} = 1470$ m s^{-1}

1.2.5 Equazioni della termo-fluidodinamica nell'approssimazione di Boussinesq

Tenendo conto di quanto visto nei paragrafi precedenti e in particolare delle (1.12), (1.13), (1.3) con (1.14) e (1.19) e applicando tutte le osservazioni fatte al sistema (1.1), otteniamo infine il sistema di equazioni per la convezione di Boussinesq in un fluido linearmente viscoso, conduttore di calore, incompressibile:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0))g\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T + r \end{cases} \tag{1.20}$$

dove ρ_0 è la densità alla temperatura di riferimento T_0,

$$\kappa = \frac{\chi}{c_p \rho_0}$$

è il coefficiente di diffusività termica e $r \gtrless 0$ è il supply di calore, che traduce la presenza di una sorgente interna di calore (rispettivamente del tipo "source" o "sink").

Capitolo 2

Il problema di convezione termica di Bénard

2.1 Descrizione del problema

Consideriamo uno strato orizzontale di fluido, in quiete e riscaldato dal basso in modo che sia mantenuto in esso un gradiente avverso di temperatura: a causa dell'espansione termica, il fluido adiacente al piano inferiore risulta più leggero del fluido della parte superiore dello strato e pertanto sarebbe portato a spostarsi verso l'alto e a ridistribuirsi per bilanciare tale situazione di instabilità. A questa tendenza naturale si oppone la viscosità stessa del fluido. Tuttavia, quando il gradiente di temperatura supera una certa soglia critica, le forze di spinta prevalgono sugli effetti della viscosità e della gravità e si può osservare l'insorgenza di moti stazionari a carattere cellulare, detti correnti convettive.

2.2 Aspetti fisici

Tale fenomeno era stato osservato già da Rumford (1797) e da Thomson (1882), il quale aveva notato il comportamento ripetitivo lungo le direzioni del piano, ma solo con gli esperimenti di Bénard (1900) si iniziò a indagare a fondo gli aspetti fisici del problema. In particolare, Bénard osservò e documentò con materiale fotografico che il fluido si suddivide in celle dentro le quali si svolge il moto e che, eseguendo l'esperimento con cura, tali celle tendono ad allinearsi e ad assumere una forma esagonale, formando così una struttura reticolare periodica estesa sul piano. Ricerche successive hanno indagato la dipendenza della forma di tali celle dalla forma del contenitore utilizzato e hanno mostrato la forte sensibilità del "pattern" assunto rispetto alla regolarità della superficie inferiore.

Un grande contributo all'interpretazione teorica dei risultati sperimentali e allo studio matematico ad essa connesso è stato dato da Lord Rayleigh (1916). In particolare, egli mostrò che il parametro decisivo per l'insorgere della convezione non è di per sé il gradiente verticale (costante e "avverso") di temperatura, bensì un numero adimensionale (chiamato appunto numero di Rayleigh) che lega insieme tale gradiente, l'accelerazione di gravità, la profondità dello strato e i coefficienti di espansione termica, di conducibilità termica e di viscosità cinematica del fluido. A tale riguardo, assume rilevanza fondamentale la determinazione della soglia critica per tale numero, superata la quale si manifestano i moti convettivi instabili.

2.3 Aspetti matematici

Lo studio del problema di convezione termica di Bénard-Rayleigh viene qui affrontato con le tecniche matematiche adatte all'indagine della stabilità lineare e non lineare. Nel primo caso si ricorre al metodo classico dei modi normali o di Fourier, nel secondo al metodo dell'energia o di Lyapunov.

Consideriamo un fluido viscoso incompressibile, in quiete, contenuto nello strato infinito $z \in (0, d)$ tra i due piani rigidi orizzontali $z = 0$ e $z = d$ (si assume pertanto z come direzione verticale ascendente). Lavoriamo quindi nel dominio

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \times (0, d)$$

Per semplicità, condurremo lo studio completo della stabilità sulle equazioni di Oberbeck-Boussinesq senza il termine dovuto a sorgenti interne di calore, ovvero (cfr. (1.20))

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0))g\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \tag{2.1}$$

rimandando alla sezione 2.4 per l'analisi dei cambiamenti nelle formule e nei risultati dovuti all'introduzione del supply di calore. Alle equazioni (2.1) affianchiamo le condizioni al contorno per la temperatura

$$\begin{cases} T = T_L \quad \text{su } z = 0 \\ T = T_U \quad \text{su } z = d \end{cases} \tag{2.2}$$

con T_L, T_U costanti e tali che $T_L > T_U$ (riscaldamento dal basso), e la classica condizione di aderenza ai bordi per la velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{su } z = 0, d \tag{2.3}$$

Cerchiamo ora una soluzione stazionaria del problema (2.1), (2.2), (2.3), detta soluzione di conduzione stazionaria, che sia del tipo motionless per la velocità (cioè $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$), mentre temperatura e pressione si suppongono dipendenti dalla sola variabile z. Indichiamo dunque con $S = (\mathbf{v}_s = \mathbf{0}, T_s = T_s(z), p_s = p_s(z))$ tale stato stazionario.
Sostituendo S in $(2.1)_3$ si ottiene

$$\Delta T_s(z) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{d^2}{dz^2} T_s(z) = 0$$

in quanto si è supposto che la temperatura stazionaria vari solo in funzione della profondità all'interno dello strato. Pertanto sarà $T_s(z) = Az + B$, con A, B da determinarsi sfruttando le condizioni (2.2).
Su $z = 0$, da $T_s(0) = T_L$ si ricava subito che $B = T_L$.
Su $z = d$, $T_s(d) = Ad + T_L = T_U \Rightarrow A = \frac{T_U - T_L}{d}$.
Risulta quindi

$$T_s(z) = -\beta z + T_L \tag{2.4}$$

dove $\beta = \frac{T_L - T_U}{d}$ è il gradiente verticale costante di temperatura.
La pressione è infine determinata dalla $(2.1)_2$, cioè da

$$\frac{dp_s}{dz} = -\rho_0\, g(1 - \alpha(-\beta z + T_L - T_0)) \tag{2.5}$$

da cui si ottiene la dipendenza quadratica

$$p_s(z) = -\rho_0\, g(1 + \alpha(T_0 - T_L))z - \frac{\rho_0 g \alpha \beta}{2} z^2 \tag{2.6}$$

prendendo ad esempio $p_s(0) = 0$.

Al fine di studiare la stabilità della soluzione stazionaria trovata $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$, (2.4), (2.6), introduciamo il moto perturbato $(\mathbf{v}_s + \mathbf{u}, T_s + \theta, p_s + \pi)$ dove $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$, $\pi = \pi(\mathbf{x}, t)$ sono rispettivamente le perturbazioni a velocità, temperatura, pressione dello stato base. Per ora non si assume che tali perturbazioni siano piccole. Scrivendo le equazioni (2.1) in corrispondenza del moto perturbato e poi sottraendo le stesse relative allo stato stazionario, si trovano le equazioni per la perturbazione $(\mathbf{u}, \theta, \pi)$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{u} - \alpha \theta g \mathbf{k} \\ \theta_t + \nabla T_s(z) \cdot \mathbf{u} + \nabla \theta \cdot \mathbf{u} = \kappa \Delta \theta \end{cases} \tag{2.7}$$

Se indichiamo $\mathbf{u} = (u, v, w)$, tenendo conto che $\nabla T_s(z) = -\beta \mathbf{k}$, nella $(2.7)_3$ si ha $\nabla T_s(z) \cdot \mathbf{u} = -\beta w$.

A questo punto è conveniente scrivere le equazioni per la perturbazione in forma adimensionale. L'adimensionalizzazione delle equazioni che descrivono un modello è molto importante, perché consente di mettere in evidenza dei numeri caratteristici e adimensionali che rispecchiano le proprietà fisiche principali del modello. Come lunghezza caratteristica è naturale prendere lo spessore d dello strato, mentre $U = \frac{\nu}{d}$ può essere la velocità caratteristica, così che $\mathcal{T} = \frac{d^2}{\nu}$ diventa il tempo di riferimento. Quindi definiamo le variabili adimensionali

$$\begin{cases} U = \frac{\nu}{d} \qquad \mathcal{T} = \frac{d^2}{\nu} \qquad \tilde{T} = U\sqrt{\frac{\beta\nu}{\kappa\alpha g}} \qquad P = \frac{\rho_0\nu^2}{d^2} \\ t = t^*\mathcal{T} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* d \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* U \qquad \theta = \theta^*\tilde{T} \qquad \pi = \pi^* P \end{cases} \tag{2.8}$$

e i numeri adimensionali

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \qquad R = \sqrt{\frac{\alpha g \beta d^4}{\kappa\nu}}$$

dove Pr è il numero di Prandtl e $Ra = R^2 = \frac{\alpha g\beta d^4}{\kappa\nu}$ è il *numero di Rayleigh*. Con questa scelta e omettendo per semplicità gli asterischi, (2.7) viene adimensionalizzato in

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} = -\nabla\pi + \Delta\mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} \\ Pr(\theta_t + \nabla\theta\cdot\mathbf{u}) = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{2.9}$$

Di conseguenza le condizioni al contorno per la velocità (aderenza ai bordi) e per la temperatura (2.2) diventano

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 \quad \text{su } z = 0, 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

In ambito lineare, assumiamo che $\mathbf{u}$, θ, π abbiano un comportamento periodico in x e y, come in una "tassellazione" ripetitiva del piano $\mathbb{R}^2$. In particolare siano $\frac{2\pi}{a_x}$, $\frac{2\pi}{a_y}$ rispettivamente i periodi nelle due direzioni (con pulsazioni parziali $a_x, a_y > 0$) e $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ il numero d'onda, tale che $\Delta^* f = -a^2 f$ (dove $\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ è il laplaciano bidimensionale).
Una *cella di periodicità* è definita come il prodotto cartesiano della singola forma che tassella il piano con lo spessore dello strato, ovvero

$$V = \left[0, \frac{2\pi}{a_x}\right] \times \left[0, \frac{2\pi}{a_y}\right] \times [0, 1]$$

Osservazione 3. È opportuno sottolineare che, in virtù dei dati sperimentali che evidenziano l'andamento periodico nel piano (x, y), sia nella teoria lineare sia in quella non lineare, è possibile limitare lo studio a una singola cella. Infatti se c'è instabilità in una cella, allora si può parlare di instabilità dell'intero sistema.
Per quanto riguarda l'effettiva forma assunta dalla cella all'interno dello schema, oltre alla soluzione esagonale formulata originariamente da Christopherson (1940) $u(x, y) = \cos\frac{1}{2}a(\sqrt{3}x + y) + \cos\frac{1}{2}a(\sqrt{3}x - y) + \cos ay$, analisi matematiche molto recenti hanno indagato l'evoluzione delle configurazioni assunte nei vari stadi del fenomeno (per esempio Mielke 1997, Getling e Brausch 2003).

2.3.1 Metodo dei modi normali o di Fourier

Affrontiamo ora l'analisi della stabilità lineare, con il metodo dei modi normali. Supponiamo quindi che le perturbazioni siano piccole, così lavoriamo con le equazioni linearizzate che si ottengono da (2.9) trascurando i termini non lineari $(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u}$ e $Pr\nabla\theta \cdot \mathbf{u}$, cioè:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t = -\nabla\pi + \Delta\mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} \\ Pr\theta_t = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{2.11}$$

con le condizioni al contorno (2.10). Cerchiamo dunque soluzioni di (2.11) periodiche in x e y, con dipendenza separata nel tempo e nello spazio della forma seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \mathbf{u}_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \\ \theta(\mathbf{x}, t) = \hat{\theta}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \theta_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \\ \pi(\mathbf{x}, t) = \hat{\pi}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \pi_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \end{cases}$$

dove $\mathbf{u}_1$, θ_1, π_1 sono le ampiezze delle perturbazioni dipendenti solo da z e a_x, a_y le pulsazioni parziali (reali) e ricordiamo che $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ è il numero d'onda orizzontale. σ è chiamato tasso di crescita o parametro di stabilità, ed è in generale complesso, del tipo $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$; il motivo di tale nome risulterà evidente dalle osservazioni seguenti.
Il sistema (2.11), separato solo nel tempo e omettendo il "cappello" diventa

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \sigma\mathbf{u} = -\nabla\pi + \Delta\mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} \\ \sigma Pr\theta = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{2.12}$$

con le solite condizioni al contorno.

Si noti che dal punto di vista matematico, tale sistema costituisce un problema agli autovalori, in cui i diversi valori di σ sono gli autovalori e la parte spaziale della perturbazione $(\mathbf{u}, \theta, \pi)$ le corrispondenti autosoluzioni.

Dimostriamo ora che il nostro modello di convezione soddisfa il *principio dello scambio delle stabilità*, di grande utilità nello studio della stabilità della soluzione di conduzione stazionaria. Infatti, la validità di tale principio esclude l'esistenza di instabilità sotto-critiche, cioè i limiti della stabilità lineare (approssimata) e non lineare (rigorosa) coincidono; inoltre ci permette di lavorare con il sistema (2.12), prendendo il parametro σ uguale a zero, ottenendo così la frontiera di stabilità marginale lineare. Si può anticipare che le equazioni così ottenute coincidono con le equazioni di Eulero-Lagrange della stabilità non lineare.

Risultato 2.1 (Principio dello scambio delle stabilità)**.** Nella convezione classica di Bénard il parametro di stabilità σ è sempre reale.

Dimostrazione. Come si è già detto, in generale $\sigma \in \mathbb{C}$, della forma $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. Lavoreremo temporaneamente nello spazio di Hilbert complesso $L^2(V)$, pertanto si considereranno l'integrazione e la norma opportuni. Moltiplicando $(2.12)_2$ scalarmente per $\overline{\mathbf{u}}$ e $(2.12)_3$ per $\overline{\theta}$ (complessi coniugati di $\mathbf{u}$, θ), e integrando su V si trova, integrando per parti, sfruttando le condizioni al contorno e facendo uso di alcune identità[1]:

$$\begin{aligned} \sigma(\|\mathbf{u}\|^2 + Pr\|\theta\|^2) = R(&< w\overline{\theta} > + < \overline{w}\theta >) \\ &-(\|\nabla\theta\|^2 + \|\nabla\mathbf{u}\|^2) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Il secondo membro di (2.13) è reale, pertanto considerando la parte immaginaria otteniamo $\sigma_i(\|\mathbf{u}\|^2 + Pr\|\theta\|^2) = 0$, da cui $\sigma_i = 0$. □

Osservazione 4. Il principio dello scambio delle stabilità si presenta in due forme: si dice che vale la forma forte quando in un sistema si ha $\sigma \in \mathbb{R}$, la forma debole quando se $\sigma_i \neq 0 \Rightarrow \sigma_r < 0$ (stabilità di tipo oscillatorio, comportamento periodico). Abbiamo visto che nel caso del problema classico di Bénard vale la forma forte, mentre in modelli per la convezione più complessi (ad esempio se si considera l'accelerazione di gravità non costante, ma dipendente dalla quota $g = g(z)$) vale solo la forma debole. Inoltre , quando il parametro di stabilità è reale, si parla di convezione stazionaria; se invece $\sigma_i \neq 0$ e non vale lo scambio delle stabilità, si hanno oscillazioni sovrastabili.

In virtù di 2.1, per trovare la soglia di instabilità, cioè il più piccolo valore di R^2 in (2.12) per cui $\sigma > 0$, bisogna cercare il più piccolo autovalore R_c^2 di

[1] Riportate nell'appendice A.

(2.12) con $\sigma = 0$ (frontiera di stabilità). Ciò equivale a lavorare in condizioni di stazionarietà (si parla di stabilità marginale) e giustifica il nome attribuito al parametro σ: in generale, ricordiamo che è il segno della sua parte reale a determinare se il fluido è stabile o instabile.

Al fine di determinare il parametro critico della stabilità lineare, consideriamo dapprima il rotore di $(2.12)_2$ e proiettiamo l'equazione risultante sull'asse z. Operiamo poi con il doppio rotore sempre sulla $(2.12)_2$ e di nuovo proiettiamo sull'asse z. Sfruttando l'identità (10) riportata nell'appendice A, per cui

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,(R\theta\mathbf{k}) = \nabla(\nabla\cdot(R\theta\mathbf{k})) - \Delta(R\theta\mathbf{k}) = \nabla(\nabla(R\theta)\cdot\mathbf{k}) - \Delta(R\theta)\mathbf{k}$$

si ottiene il nuovo sistema scalare:

$$\begin{cases} \sigma\zeta = \Delta\zeta \\ \sigma\Delta w = R\Delta^*\theta + \Delta\Delta w \\ \sigma Pr\theta = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{2.14}$$

dove w (terza componente di $\mathbf{u}$) viene definita variabile essenziale, insieme a θ e a $\zeta = \nabla\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}$ (terza componente del vettore vorticità), e Δ^* è l'operatore laplaciano bidimensionale.
Al sistema (2.14) bisogna affiancare le condizioni al contorno opportune in relazione alla natura dei piani $z = 0$, $z = 1$ delimitanti la striscia. Si distinguono due casi:

1. **Frontiere rigide**. Se i piani sono rigidi, si ammette che non ci sia slittamento; si considerano quindi le condizioni:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{su } z = 0,1 \qquad \text{no-slip} \\ \theta = 0 \quad \text{su } z = 0,1 \end{cases}$$

2. **Frontiere libere**. In questo caso si richiede che i piani siano liberi da stress tangenziali, ovvero:

$$\begin{cases} u_z = v_z = 0 \quad \text{su } z = 0,1 \\ w = 0 \quad \text{su } z = 0,1 \\ \theta = 0 \quad \text{su } z = 0,1 \end{cases}$$

Ovviamente è anche possibile considerare condizioni al contorno di tipo misto. Vale la pena di osservare che i bordi del tipo libero-libero sono difficilmente realizzabili in laboratorio, ma sono interessanti matematicamente perché ci consentono di risolvere il problema analiticamente.

Tornando al sistema (2.14), le condizioni sui bordi si scrivono rispettivamente

$$w = 0 \qquad w_z = 0 \qquad \theta = 0 \qquad \zeta = 0 \qquad \text{su } z = 0, 1$$

nel primo caso e

$$w = 0 \qquad w_{zz} = 0 \qquad \theta = 0 \qquad \zeta_z = 0 \qquad \text{su } z = 0, 1$$

nel secondo. Cercando quindi soluzioni del tipo modi normali

$$\begin{cases} \zeta(\mathbf{x}) = Z(z)e^{i(a_x x + a_y y)} \\ w(\mathbf{x}) = W(z)e^{i(a_x x + a_y y)} \\ \theta(\mathbf{x}) = \Theta(z)e^{i(a_x x + a_y y)} \end{cases}$$

il sistema (2.14) si riscrive come

$$\begin{cases} \sigma Z = (D^2 - a^2)Z \\ \sigma(D^2 - a^2)W = -Ra^2\Theta + (D^2 - a^2)^2 W \\ \sigma Pr\Theta = RW + (D^2 - a^2)\Theta \end{cases}$$

dove si è posto $D := \frac{d}{dz}$, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ numero d'onda orizzontale, e le condizioni al contorno, riguardanti ora l'ampiezza dipendente solo da z, diventano rispettivamente nei due casi

$$W = 0 \qquad DW = 0 \qquad \Theta = 0 \qquad Z = 0 \qquad \text{su } z = 0, 1$$

e

$$W = 0 \qquad D^2W = 0 \qquad \Theta = 0 \qquad DZ = 0 \qquad \text{su } z = 0, 1$$

Per quanto già osservato, alla criticalità $\sigma = 0$ e il sistema diventa

$$\begin{cases} (D^2 - a^2)Z = 0 \\ -Ra^2\Theta + (D^2 - a^2)^2 W = 0 \\ RW + (D^2 - a^2)\Theta = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Dimentichiamoci della $(2.15)_1$. Eliminando Θ dalle altre due equazioni, si ottiene

$$(D^2 - a^2)^2 W = -R^2 a^2 W \tag{2.16}$$

con le seguenti condizioni al contorno per W:

$$W = 0 \qquad DW = 0 \qquad (D^2 - a^2)^2 W = 0 \qquad \text{su } z = 0, 1$$

nel caso di piani rigidi e

$$W = 0 \qquad D^2W = 0 \qquad (D^2 - a^2)^2 W = 0 \qquad \text{su } z = 0, 1$$

nel caso di piani stress-free.

L'equazione (2.16) con le opportune condizioni al bordo costituisce un problema agli autovalori per il numero di Rayleigh $Ra = R^2$. Il valore critico per la stabilità lineare si ricava trovando il minimo di R^2 al variare di a^2.

Osservazione 5. Nel caso di piani entrambi rigidi la soluzione del problema è perseguibile solo per via numerica: i metodi usati fanno ricorso alla matrice composta o ai polinomi di Chebyshev. Invece nel caso di frontiere stress-free (come già detto, fisicamente meno interessante) è possibile risolvere il problema analiticamente nel modo che ora vedremo.

Supponendo $W(z) \in C^\infty$, dalla (2.16) e dalle condizioni al contorno per frontiere libere, si deduce che deve essere $D^{2m}W = 0$ per $z = 0, 1$ e $m \in \mathbb{N}$, quindi $W(z) = \tilde{W} \sin n\pi z$ con $n \in \mathbb{N}$ e $\tilde{W}$ ampiezza ora costante, non nulla. Sostituendo questa soluzione nella (2.16), otteniamo l'equazione caratteristica per R^2, dipendente non solo da a^2 ma anche da n:

$$R^2 = \frac{(n^2\pi^2 + a^2)^3}{a^2}$$

Per ogni fissato a^2, il minimo R^2 si ha in corrispondenza di $n = 1$, ossia

$$R^2 = \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2} \tag{2.17}$$

Pertanto il numero di Rayleigh critico per l'instabilità lineare è dato da

$$R_c^2 = \min_{a^2>0} \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2} = \frac{27}{4}\pi^4$$

in corrispondenza del numero d'onda critico $a_c = \sqrt{\frac{\pi^2}{2}}$.

La condizione sufficiente per la stabilità lineare è quindi $R^2 \leq R_c^2 = \frac{27}{4}\pi^4$, quindi l'insorgenza dei moti convettivi instabili (linearmente) avviene per $R^2 > R_c^2$. Vale la pena di notare che la condizione critica coinvolge solo il numero di Rayleigh, quindi è indipendente da quello di Prandtl.

2.3.2 Metodo dell'energia o di Lyapunov

Affrontiamo ora l'analisi della stabilità non lineare della soluzione di conduzione stazionaria trovata precedentemente, con il metodo dell'energia. Tale tecnica non richiede alcuna condizione sulla grandezza delle perturbazioni e in questo caso specifico ci permetterà di verificare che le frontiere per l'instabilità lineare e per quella non lineare coincidono, e che pertanto non sono possibili instabilità sotto-critiche.

Riprendiamo quindi il sistema (2.9) con le condizioni al contorno opportune. Ancora, supponiamo che le perturbazioni siano periodiche in (x, y) e quindi restringiamo le nostre considerazioni alla cella di periodicità V. Introduciamo in modo naturale l'energia del problema della forma:

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2}Pr\|\theta\|^2 \tag{2.18}$$

che è la somma delle energie cinetica e termica delle perturbazioni. Derivando E rispetto al tempo, sostituendo $\mathbf{u}_t$, θ_t da (2.9) e usando le condizioni al bordo, troviamo dopo qualche passaggio (e facendo uso delle classiche identità riportate in appendice):

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= 2R\int_V w\theta\,dx - \int_V |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx - \int_V |\nabla\theta|^2\,dx = \\ &= RI - (D(\mathbf{u}) + D(\theta)) = RI - \mathcal{D}\end{aligned}$$

dove si è posto $I = 2\int_V w\theta\,dx$, $D(f) = \|\nabla f\|^2 = \int_V |\nabla f|^2\,dx$ integrale (o energia) di Dirichlet, $\mathcal{D} = D(\mathbf{u}) + D(\theta)$.
Definendo R_E come

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\mathcal{H}} \frac{I}{\mathcal{D}} \tag{2.19}$$

dove $\mathcal{H} = \{\mathbf{u}, \theta \in H_0^1(V) | \nabla\cdot\mathbf{u} = 0\}$ è lo spazio delle soluzioni ammissibili, risulta ovviamente

$$\frac{dE}{dt} = RI - \mathcal{D} \le -\mathcal{D}R\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_E}\right) \tag{2.20}$$

Posto per semplicità $b := \frac{R_E - R}{R_E}$, se $R < R_E$ allora $b > 0$; dalla (2.20), applicando la disuguaglianza di Poincaré[2] e qualche altro passaggio, si ricava la disuguaglianza dell'energia

$$\frac{dE}{dt} \le -2b\gamma_0 t \tag{2.21}$$

dove $\gamma_0 > 0$ è un opportuno parametro costante, che dipende dalla costante di Poincaré. Dalla (2.21) si ottiene che l'energia $E(t)$ decade nel tempo con legge almeno di tipo esponenziale:

$$E(t) \le E(0)e^{-2b\gamma_0 t} \qquad \forall\, t \ge 0, \text{ con } \gamma_0 > 0 \text{ e costante}$$

da cui segue che $E \to 0$ per $t \to +\infty$. Questo dimostra che quando vale la condizione $R < R_E$, la soluzione di conduzione stazionaria è non linearmente asintoticamente stabile, per ogni perturbazione iniziale.

Il problema quindi si riduce a trovare il parametro critico R_E della stabilità non lineare risolvendo il problema variazionale (2.19). Come ricavato in [7], le equazioni di Eulero-Lagrange relative a tale problema sono

$$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\\ -\nabla\pi + \Delta\mathbf{u} + R_E\theta\mathbf{k} = 0\\ R_E w + \Delta\theta = 0\end{cases}$$

[2] Appendice A, (5).

insieme alle stesse condizioni omogenee al bordo per $\mathbf{u}, \theta$ su $z = 0, 1$, e con le stesse condizioni di periodicità. La quantità $\pi = \pi(\mathbf{x})$ denota un moltiplicatore di Lagrange, introdotto nel problema variazionale, per tener conto del vincolo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Come già anticipato, R_E soddisfa lo stesso problema agli autovalori del caso lineare (2.14), con $\sigma = 0$, pertanto alla criticalità si ha che

$$R^2 = R_E^2$$

e quindi i parametri critici della stabilità lineare e non lineare coincidono e non sono possibili instabilità sotto-critiche. Quindi per il problema di Bénard classico le frontiere di stabilità lineare e non lineare coincidono.

Osservazione 6. In conclusione, vogliamo far notare che l'analisi della stabilità, lineare e non lineare, è svincolata dal numero di Prandtl Pr, ed è invece strettamente legata al numero di Rayleigh $Ra = R^2$.

2.4 Presenza di sorgenti di calore interne

Complichiamo ora il modello introducendo un termine aggiuntivo nell'equazione per la temperatura, che traduce la presenza di una sorgente di calore interna al fluido, oltre al riscaldamento dal basso cui il mezzo è sempre sottoposto:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0))g\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T + r \end{cases} \tag{2.22}$$

dove $r \gtrless 0$ è il supply di calore introdotto, che per semplicità consideriamo costante. Naturalmente le (2.22) devono valere nella striscia $\mathbb{R}^2 \times \{z \in (0, d)\}$ per $t > 0$ e con le stesse condizioni al bordo di prima.

Evidenziamo alcuni cambiamenti nello studio della stabilità lineare e non, dovuti a tale aggiunta.

Nella ricerca dello stato stazionario motionless $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$, si ottiene la diversa relazione per la temperatura stazionaria $T_s(z)$

$$\frac{d^2}{dz^2} T_s(z) = -\frac{r}{\kappa}$$

da cui $T_s(z) = -\frac{r}{2\kappa} z^2 + Az + B$ con A, B da determinarsi sfruttando le condizioni (2.2).
Su $z = 0$, da $T_s(0) = T_L$ si ricava ancora che $B = T_L$.

Su $z = d$, $T_s(d) = -\frac{r}{2\kappa}d^2 + Ad + T_L = T_U \;\Rightarrow\; A = \frac{T_U - T_L}{d} + \frac{rd}{2\kappa}$.
Risulta quindi un profilo parabolico (non più lineare)

$$T_s(z) = -\frac{r}{2\kappa}z^2 + \left(\frac{rd}{2\kappa} - \beta\right)z + T_L \tag{2.23}$$

dove $\beta = \frac{T_L - T_U}{d}$ è il gradiente (verticale costante) di temperatura introdotto in precedenza.

A seconda del segno di r si distinguono due casi: se $r > 0$ si parla di sorgente o "source", se $r < 0$ si parla di pozzo o "sink"; tali termini rispecchiano la forma del profilo assunto dalla distribuzione di temperatura. Il punto di massimo/minimo si ha in $z = -\frac{\beta\kappa}{r} + \frac{d}{2}$, ed effettivamente esiste all'interno dello strato se tale quantità è compresa tra 0 e d.

In questo caso il numero di Rayleigh è definito (si veda [7]) come

$$Ra = R^2 = \frac{|r|\alpha g d^5}{2\nu\kappa^2}$$

e il suo valore critico è determinato risolvendo il problema variazionale

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\mathcal{H}} \frac{I}{\mathcal{D}}$$

dove $I = \int_V (1 + 2(\xi - z)w)\theta\, dx$, $\mathcal{D} = \|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla\theta\|^2$, $\xi = \frac{\kappa\beta}{2|r|d^2}$.

2.5 Campo di gravità variabile

Se il campo di gravità agente sulla direzione verticale varia a seconda della quota, allora punti diversi del fluido contenuto nello strato orizzontale sono soggetti a diverse forze di spinta. Questo può dar luogo a situazioni in cui solo parte del fluido presenta una tendenza a diventare instabile, mentre il resto tende a rimanere stabile. Casi simili sono di grande interesse nello studio dei moti convettivi nell'alta atmosfera terrestre o negli strati stellari, ove non sarebbe ragionevole considerare l'accelerazione di gravità come costante.

Le equazioni che modellano la convezione termica in questo caso sono

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0))g(1 + \epsilon h(z))\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa\Delta T \end{cases} \tag{2.24}$$

dove si nota l'aggiunta nel termine contenente la gravità ($g(z) = g(1+\epsilon h(z))$, $g > 0$ costante e ϵ è un parametro di scala per $h(z)$), con le stesse condizioni al contorno

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{su } z = 0, d \\ T = T_L \quad \text{su } z = 0 \\ T = T_U \quad \text{su } z = d \end{cases}$$

con $T_L > T_U$.

Si vedano [5] e [7] per l'analisi della stabilità non lineare e per un'ampia discussione dei risultati numerici ottenuti in corrispondenza di diverse scelte per la funzione $h(z)$. Tale studio, raffrontato con il caso classico, evidenzia come il caso in cui il coefficiente variabile $h(z)$ sia negativo conduca a numeri di Rayleigh critici maggiori della situazione classica a gravità costante, quindi una accelerazione di gravità decrescente ($h < 0$) risulta sempre stabilizzante. Al contrario, una gravità crescente ($h > 0$) risulta destabilizzante. Queste considerazioni sono in accordo con i risultati delle indagini numeriche prendendo per esempio $h(z) = -z$.

Si cerca come nel caso a gravità costante, una soluzione stazionaria del tipo motionless e con temperatura e pressione dipendenti dalla variabile z, del tipo $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}, T_s(z) = -\beta z + T_L, p_s = p_s(z)$, che dipenderà ora dalla dipendenza di g da z, cioè da $h(z)$.
Il sistema che governa la perturbazione allo stato base trovato, con le notazioni di prima, è, sostituendo $g(1 + \epsilon h)$ a g:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{u} + \alpha g(1 + \epsilon h)\theta \mathbf{k} \\ \theta_t + \nabla \theta \cdot \mathbf{u} = \kappa \Delta \theta \end{cases} \tag{2.25}$$

Anche l'adimensionalizzazione non cambia. Nelle equazioni adimensionali per le perturbazioni l'ultimo termine di $(2.9)_2$ diventa $R(1+\hat{\epsilon}\hat{h})\theta\mathbf{k}$, dove $\hat{\epsilon}\hat{h}(z)$ rappresenta ora la forma adimensionale di $\epsilon h(z)$, anche se nel seguito delle considerazioni, senza possibilità di equivoco e per maggiore semplicità di notazioni, si può eliminare il "cappello".

Per quanto riguarda l'analisi della stabilità lineare, separando le perturbazioni nella dipendenza temporale di tipo esponenziale, le equazioni da studiare nel caso a gravità variabile sono ancora le (2.12), dove però l'ultimo termine di $(2.12)_2$ è moltiplicato per il fattore variabile in z $1 + \epsilon h(z)$. A causa di questo fattore, e lavorando con le variabili essenziali (w e θ) che soddisfano il sistema (2.14) modificato per la presenza di quel fattore nella $(2.14)_2$, si può dimostrare con calcoli non banali e nel caso di frontiere libere da sforzi tangenziali, la validità del principio dello scambio delle stabilità, ma nella sua forma debole, per la quale se $\sigma_i \neq 0$ allora $\sigma_r < 0$.

Dimostrazione. Eliminando la perturbazione w, con qualche passaggio si arriva all'equazione agli autovalori σ per θ, più complicata per la presenza di un coefficiente dipendente da z:

$$\sigma^2 Pr\Delta\theta - \sigma(1+Pr)\Delta^2\theta + \Delta^3\theta - R^2(1+\epsilon h(z))\Delta^*\theta = 0$$

A questo punto si procede, come nel caso classico, lavorando nello spazio di Hilbert complesso $L^2(V)$, con V cella di periodicità. Si moltiplica per il complesso coniugato $\bar{\theta}$ della perturbazione della temperatura e poi si integra su V, facendo ricorso a identità piuttosto complicate, applicando il teorema della divergenza (quando possibile), e utilizzando le condizioni omogenee al bordo. Da ultimo, si arriva alla relazione

$$\sigma_i\left((1+Pr)\|\Delta\theta\|^2 + 2\sigma_r Pr\|\nabla\theta\|^2\right) = 0$$

che ci consente di affermare che se $\sigma_i \neq 0$ allora $\sigma_r < 0$, dimostrando la validità debole del principio. □

Quindi, almeno nel caso delle frontiere libere, è sufficiente considerare la frontiera di convezione stazionaria $\sigma = 0$ nel derivare i numeri di Rayleigh critici della teoria lineare.

Osservazione 7. Vale la pena anche di notare che il problema agli autovalori legato all'analisi della stabilità lineare, con il metodo dei modi normali, per la presenza del coefficiente variabile $1+\epsilon h(z)$, non si può risolvere se non in modo numerico. Analiticamente, si possono avere informazioni qualitative con l'analisi asintotica, prendendo ϵ come parametro di perturbazione (e per piccoli ϵ).

Capitolo 3

Mezzi porosi

3.1 Introduzione ed esempi

I mezzi porosi sono materiali molto comuni nella vita di ognuno. Se ne trovano esempi in natura come la lava, la sabbia, il legno, la pelliccia o le piume degli animali, nei tessuti biologici come le ossa e la pelle, in artefatti umani come il cemento, le ceramiche, le schiume metalliche. Già da questo veloce elenco, emerge quanto sia vario il panorama dei mezzi porosi e quanto possano essere interessanti le applicazioni che li riguardano in tanti campi. Non deve stupire quindi la mole di ricerche condotte negli ultimi decenni sul loro impiego nella costruzione di edifici (per favorire o ridurre la dispersione di calore), in geofisica (studio di terremoti, falde acquifere e inquinamento dovuto a sostanze in esse disciolte, scioglimento dei ghiacci), in acustica, in medicina, in aeronautica e nell'industria automobilistica. Chiaramente a fianco di tali ricerche di carattere applicativo, è sorto e continua a svilupparsi un apparato teorico che indaga matematicamente il comportamento e le proprietà di questi modelli.

Nonostante la varietà di forme e caratteristiche che i mezzi porosi presentano, il concetto comune che sta alla base della teoria rimane quello della porosità. Essa è definita come il rapporto della frazione vuota nel materiale poroso rispetto al volume totale occupato dal mezzo poroso, ovvero si definisce la *porosità* nel punto $\mathbf{x}$ al tempo t come

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{V_V}{V_T}$$

dove V_V è il volume dello spazio vuoto (costituito dai pori e solitamente riempito da un fluido come aria o acqua) e V_T è il volume totale del materiale includendo anche la matrice solida. È evidente che $0 \leq \phi \leq 1$; la porosità è vicina a 0 per esempio per materiali come il cemento, mentre è prossima a 1 per le pellicce degli animali.

In questo capitolo presenteremo alcuni dei modelli matematici più semplici per descrivere il comportamento dei mezzi porosi saturati da fluidi, per passare poi nel capitolo seguente al problema della convezione termica.

3.2 Modello di Darcy

L'equazione, oggi nota come *legge di Darcy* (in onore dell'ingegnere francese che la formulò nel 1856), afferma che la velocità di un fluido attraverso un mezzo poroso è proporzionale al gradiente di pressione nella direzione del flusso, ovvero nel caso 1-dimensionale originariamente presentato

$$\mu u = -k\frac{dp}{dx} \tag{3.1}$$

dove u è la velocità del fluido nella direzione x, p è la pressione del fluido nel mezzo poroso, μ è la viscosità dinamica del fluido e k è la permeabilità[1] del mezzo poroso. L'estensione 3-dimensioniale della (3.1), con l'introduzione di un termine dovuto a forze esterne (come la gravità), risulta

$$\frac{\mu}{k}\mathbf{v} = -\nabla p + \rho\,\mathbf{f} \tag{3.2}$$

dove $\mathbf{v} = (u, v, w)$ è il campo di velocità medio nel mezzo poroso[2], $\mathbf{f}$ è la forza esterna, ρ è la densità del fluido.
L'equazione (3.2) descrive bene il flusso in un mezzo poroso saturo, purché la velocità sia sufficientemente bassa. Si osservi che nella relazione mancano il termine non lineare di inerzia $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}$ e il termine $\mathbf{v}_t$, presenti nelle equazioni di Navier-Stokes (cfr. (1.1)). Se il fluido nel mezzo poroso è incomprimibile, alla (3.2) si deve aggiungere la condizione $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$.

3.2.1 Equazione dei mezzi porosi

Una relazione che sussiste quando il fluido è compressibile, cioè se $\nabla\cdot\mathbf{v} \neq 0$, è la cosiddetta equazione dei mezzi porosi, la quale ha trovato recenti applicazioni anche nell'image processing.

[1] La permeabilità è una funzione della porosità, che effettivamente misura la facilità con cui il fluido passa attraverso il mezzo poroso.

[2] Si intende la velocità mediata sui pori del mezzo poroso, e se $\hat{\mathbf{v}}$ è la velocità mediata (attuale) del fluido in un poro, allora $\mathbf{v} = \phi\hat{\mathbf{v}}$ nell'approssimazione del continuo, con ϕ porosità.

Per un fluido compressibile la densità soddisfa l'equazione di continuità

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{v}) = 0 \tag{3.3}$$

Combinando la (3.3) con la (3.2) prendendo $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, per cui $\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p$ e ricordiamoci che ora $p = p(\rho)$. Sostituendo nella (3.3) si ottiene $\rho_t - \frac{k}{\mu}\nabla \cdot (\rho \nabla p) = 0$, cioè $\rho_t - \frac{k}{\mu}\nabla \cdot (\rho\, p'(\rho)\nabla \rho) = 0$.
Se indichiamo con $\Phi(\rho)$ un potenziale della funzione $\frac{k\rho\, p'(\rho)}{\mu}\nabla \rho$, per cui valga $\nabla \Phi = \Phi'(\rho)\nabla \rho = \frac{k\rho\, p'(\rho)}{\mu}\nabla \rho$, si ottiene l'equazione

$$\rho_t - \Delta \Phi(\rho) = 0$$

Questa relazione è spesso chiamata l'equazione dei mezzi porosi.

3.3 Modello di Forchheimer

Se la velocità del flusso è sufficientemente elevata, allora il legame lineare di Darcy (3.2) di proporzionalità fra il gradiente di pressione e la velocità stessa risulta inadeguato a descrivere accuratamente la velocità. Forchheimer propose (1901) di sostituire tale equazione con una di tipo non lineare, nello specifico di aggiungere al primo membro di (3.1) o (3.2) una dipendenza quadratica o cubica nella velocità, come ad esempio

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k}\mathbf{v} - b|\mathbf{v}|\mathbf{v} + \rho\, \mathbf{f} \tag{3.4}$$

con $b > 0$; la (3.4) è nota appunto come modello di Forchheimer.

3.4 Modello di Brinkman

Se la porosità ϕ è vicina a 1, cioè la matrice solida occupa una minima parte del volume totale, o il mezzo poroso è adiacente a una parete solida, i modelli precedenti non sono ritenuti soddisfacenti. È stata pertanto proposta (Brinkman, 1947) la relazione

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k}\mathbf{v} + \lambda \Delta \mathbf{v} + \rho\, \mathbf{f} \tag{3.5}$$

dove si tiene conto del contributo del termine con il laplaciano come nelle equazioni di Navier-Stokes; lo stesso coefficiente $\lambda > 0$ viene solitamente chiamato coefficiente di viscosità effettiva. L'equazione (3.5) è nota come equazione di Brinkman.

Osservazione 8. Vale la pena di osservare che ci si può aspettare condizioni al contorno sulla velocità diverse per questo modello rispetto a quelli di Darcy o Forchheimer. Naturalmente si possono studiare, e sono anche fisicamente molto interessanti, modelli del tipo Brinkman-Forchheimer, cioè con entrambe le generalizzazioni.

3.5 Modello di Darcy anisotropico

I modelli citati finora sono utili quando si tratta una situazione isotropica, cioè quando il comportamento è lo stesso in tutte le direzioni. Tuttavia molti mezzi porosi presentano caratteristiche fortemente anisotropiche (si pensi agli strati rocciosi o al legno). In questi casi tipicamente è la permeabilità k a variare a seconda della direzione considerata, pertanto alla k scalare si sostituisce un tensore $\mathbf{K}$, la cui struttura dipende dalla matrice solida del materiale, e si deve lavorare con un'equazione della forma

$$\mathbf{K}\nabla p = -\mu\mathbf{v} + \rho\,\mathbf{K}\mathbf{f}$$

Un esempio specifico da evidenziare può essere quello [8] in cui la permeabilità nella direzione verticale è diversa da quella nelle direzioni orizzontali, per cui il tensore è diagonale

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

con $k \neq k_3$, $k, k_3 > 0$.

3.6 Equazioni per altri campi

Alle equazioni viste finora, se ne possono affiancare altre che descrivono l'evoluzione di ulteriori aspetti del modello che si vogliono indagare: ad esempio la temperatura o la concentrazione di una sostanza chimica (come un sale) disciolta nel fluido che riempie il mezzo poroso. Vediamo come ricavare le equazioni per questi campi, adottando le notazioni di [8].

3.6.1 Temperatura

Vogliamo dunque determinare la temperatura in un punto $\mathbf{x}$. Allo scopo, in un dato volume piccolo[3] $\tilde{\Omega}$, contenente il punto $\mathbf{x}$, indichiamo con s la parte di matrice solida e con f quella fluida. Siano Ω_s, Ω_f rispettivamente i volumi di queste due parti, κ_s, κ_s le diffusività termiche, ρ_{0s}, ρ_{0f} le densità, c_s il calore specifico del solido e c_{pf} il calore specifico, a pressione costante, del fluido. Siano poi $\mathbf{v}$ la velocità media del fluido (su tutto $\tilde{\Omega}$) nel punto $\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{v}}$ la velocità media sul poro (cioè su Ω_f), definita da $\mathbf{v} = \phi\hat{\mathbf{v}}$. Separando le componenti solida e fluida, otteniamo due equazioni per il campo di temperatura T (nei due diversi formalismi lagrangiano ed euleriano):

$$(\rho_0 c)_s T_t = \kappa_s \Delta T \tag{3.6}$$

$$(\rho_0 c_p)_f (T_t + \nabla T \cdot \hat{\mathbf{v}}) = \kappa_f \Delta T \tag{3.7}$$

Eseguendo la combinazione $(1-\phi)(3.6) + \phi(3.7)$ e introducendo le nuove notazioni

$$(\rho_0 c)_m = (1-\phi)(\rho_0 c)_s + \phi(\rho_0 c_p)_f \qquad M = \frac{(\rho_0 c_p)_f}{(\rho_0 c)_m} \tag{3.8}$$

$$\kappa_m = (1-\phi)\kappa_s + \phi\kappa_f \qquad \kappa = \frac{\kappa_m}{(\rho_0 c_p)_f} \tag{3.9}$$

si arriva all'equazione

$$\frac{1}{M} T_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T \tag{3.10}$$

che regola il campo di temperatura nel mezzo poroso. Se si vuole accoppiarla alla (3.2), occorre specificare un'equazione di stato per la densità $\rho = \rho(T)$, che crea il legame fra i due tipi di comportamento, meccanico e termico (termine di accoppiamento).

3.6.2 Sale disciolto

Per completezza, usando una procedura simile, ricaviamo anche un'equazione per la concentrazione C di un sale disciolto nel fluido, supponendo che esso non sia assorbito dalla matrice solida. Nella parte fluida C soddisfa

$$C_t + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla C = \kappa_c \Delta C$$

[3] Nel senso che la scala di lunghezza di $\tilde{\Omega}$ è sufficientemente grande rispetto alla dimensione di un poro del mezzo, ma al contempo è piccola rispetto all'intero dominio del flusso.

cioè, ricordando $\mathbf{v} = \phi\hat{\mathbf{v}}$,

$$\phi C_t + \mathbf{v} \cdot \nabla C = \phi \kappa_c \Delta C$$

Adimensionalizzando con tempo $\mathcal{T} = \frac{d^2}{M\kappa}$ e velocità $U = \frac{\kappa}{d}$, dove d è una lunghezza tipica, si può scrivere la relazione precedente nella forma adimensionale

$$M\phi C_t + \mathbf{v} \cdot \nabla C = \frac{1}{Le}\Delta C \tag{3.11}$$

dove $Le = \frac{\phi\kappa_c}{\kappa}$ è il numero di Lewis, tipico del modello.

Capitolo 4

Convezione termica in mezzi porosi

In questo capitolo studieremo il problema di convezione di Bénard in uno strato di materiale poroso saturato da un fluido e investigheremo la stabilità della soluzione stazionaria motionless. In particolare, si condurrà l'analisi completa della stabilità lineare e non lineare per il modello di Darcy (che ci permetterà di dimostrare che le frontiere di stabilità coincidono), mentre negli altri modelli si riporteranno solo le differenze più significative.

4.1 Problema di Bénard per le equazioni di Darcy

La situazione fisica che consideriamo è la stessa del capitolo 2, con la differenza che ora lo strato orizzontale è costituito da un mezzo poroso, attraverso il quale scorre il fluido. Sia ancora $(0, d)$ lo spessore verticale di tale strato (infinito nelle direzioni x e y), per cui i moti che studiamo avvengono nella striscia $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} \times \{z \in (0, d)\}$; siano $T_L > T_U$ le temperature fissate e costanti a cui sono tenuti i piani rispettivamente inferiore e superiore, delimitanti lo strato.

Riscriviamo la (3.2) adattandola al problema di convezione termica, cioè esplicitando la forza di spinta a cui è soggetto il sistema riscaldato dal basso, e affianchiamole la condizione di incompressibilità e l'equazione per il campo di temperatura:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k}\mathbf{v} - g\rho(T)\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \tag{4.1}$$

Le (4.1) sono il sistema completo di equazioni che governa la convezione termica in un mezzo poroso di tipo Darcy.
Ricordiamo che le funzioni che caratterizzano lo stato sono ancora la velocità $\mathbf{v}$, la temperatura T e la pressione p, e che le quantità μ, k, κ, g (rispettivamente: viscosità dinamica, permeabilità, diffusività termica, gravità) sono costanti positive. $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ è il versore nella direzione verticale e $\rho(T)$ è la relazione densità-temperatura; come nel caso trattato prima, adottiamo la relazione lineare $\rho = \rho_0\,(1 - \alpha(T - T_0))$, in accordo con l'approssimazione di Boussinesq, e mantenendo le stesse notazioni.

Prendiamo in considerazione ancora la soluzione di equilibrio, con velocità nulla

$$\begin{cases} \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \\ T_s(z) = -\beta z + T_L \\ p_s(z) \text{ determinata da } \frac{dp_s}{dz} = g\rho_0(1 - \alpha(T_s(z) - T_0)) \end{cases} \tag{4.2}$$

che rappresenta la situazione in cui non si manifestano moti convettivi, e il gradiente di temperatura β è costante all'interno dello strato. Le equazioni non lineari per la perturbazione $(\mathbf{u}, \theta, \pi)$ che derivano da (4.1), usando (4.2) sono (cfr. (2.7)):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla\pi - \frac{\mu}{k}\mathbf{u} - g\rho_0\alpha\theta\mathbf{k} \\ \theta_t + \nabla\theta \cdot \mathbf{u} = \beta w + \kappa\Delta\theta \end{cases} \tag{4.3}$$

dove w è la terza componente di $\mathbf{u}$, che avrà sempre un ruolo essenziale nella discussione della stabilità.
Scegliendo ora come grandezze di riferimento $L = d$, $U = \frac{\kappa}{d}$, $\mathcal{T} = \frac{d^2}{\kappa}$, avremo come variabili adimensionali le seguenti [8]:

$$\begin{cases} \tilde{T} = dU\sqrt{\frac{\beta\mu}{\kappa\alpha g k\rho_0}} \qquad R = \sqrt{\frac{\alpha g k\rho_0\,\beta d^2}{\kappa\mu}} \qquad P = \frac{\mu U d}{k} \\ t = t^*\frac{d^2}{\kappa} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* d \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* U \qquad \theta = \theta^*\tilde{T} \qquad \pi = \pi^* P \end{cases} \tag{4.4}$$

dove $Ra = R^2$ è il nuovo numero di Rayleigh, e omettendo poi gli asterischi, otteniamo da (4.3) le equazioni per la perturbazione in forma adimensionale:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla\pi - \mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} \\ \theta_t + \nabla\theta \cdot \mathbf{u} = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{4.5}$$

Accanto alla solita assunzione (in accordo con le osservazioni sperimentali sul comportamento ripetitivo nelle direzioni x e y) della periodicità di $\mathbf{u}, \theta, \pi$ nelle direzioni x, y, che ci permetterà di lavorare in una cella di periodicità[1],

[1] Qualunque forma la cella possa avere nel piano x, y, il suo prodotto cartesiano con $(0, 1)$ è la cella di periodicità.

dobbiamo aggiungere le condizioni al contorno: è sufficiente ora assegnare (oltre alla temperatura) la componente normale della velocità sul bordo, in quanto nell'equazione della quantità di moto, per la legge di Darcy $(4.5)_2$, è presente solo il termine $\mathbf{u}$. Pertanto si considerano le condizioni

$$\begin{cases} w = 0 \quad \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 \quad \text{su } z = 0, 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

Osservazione 9. Un altro problema interessante da studiare potrebbe essere proprio quello di individuare la forma della cella, quando comincia nel fluido la convezione. Si dovrebbe fare un'analisi matematica dei possibili "pattern" che possono occorrere nella teoria della stabilità non lineare una volta che si instaurano i moti convettivi.

4.1.1 Stabilità lineare

Per l'analisi della stabilità lineare, trascuriamo in (4.5) il termine non lineare $\nabla\theta \cdot \mathbf{u}$ e scriviamo le perturbazioni nella forma separata nel tempo, con una dipendenza di tipo esponenziale:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{\sigma t} \\ \theta = \hat{\theta}(\mathbf{x}) e^{\sigma t} \\ \pi = \hat{\pi}(\mathbf{x}) e^{\sigma t} \end{cases}$$

per arrivare alle equazioni, dove abbiamo omesso il "cappello" per semplicità,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla\pi - \mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} \\ \sigma\theta = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{4.7}$$

Procedendo come nel risultato 2.1, si dimostra che anche in questo caso il parametro di stabilità σ è reale, ovvero che vale la forma forte del principio dello scambio delle stabilità. Pertanto è sufficiente prendere $\sigma = 0$ in (4.7) per ottenere le equazioni che governano la frontiera di instabilità lineare:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla\pi - \mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} \\ 0 = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{4.8}$$

Il sistema (4.8) con le condizioni al contorno (4.6) costituisce un problema agli autovalori per il numero di Rayleigh; chiamiamo R_c il più piccolo di tali autovalori.

Osservazione 10. Vale la pena di mettere in evidenza il fatto che la teoria lineare permette di trovare solo una frontiera per l'instabilità, cioè tutte le volte che $R > R_c$, la soluzione stazionaria di (4.7) ha $\sigma = \sigma_r > 0$, così cresce nel tempo ed è instabile. In particolare, le equazioni linearizzate non danno alcuna informazione sulla stabilità non lineare (rigorosa). Potrebbe infatti capitare che la soluzione delle equazioni non lineari (4.5) diventi instabile per un valore di R più piccolo di R_c: questo è il caso dell'esistenza di instabilità sotto-critiche.

4.1.2 Stabilità non lineare

Procediamo ora con l'analisi della stabilità non lineare, la quale come nel caso classico condurrà ad un problema variazionale per la determinazione di R_E. Scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange, si mostrerà che R_E soddisfa lo stesso problema agli autovalori (4.8) (con $\sigma = 0$), così $R_E^2 = R^2$, e cioè che anche per le equazioni di Darcy per la convezione in un mezzo poroso è possibile stabilire il risultato ottimale per le frontiere di stabilità lineare e non lineare, che esclude la possibilità di instabilità sotto-critiche.

Come già visto nella sezione 2.3.2, moltiplichiamo $(4.5)_2$ per $\mathbf{u}$, $(4.5)_3$ per θ e integriamo sulla cella di periodicità V:

$$\begin{cases} 0 = R\langle \theta, w\rangle - \|\mathbf{u}\|^2 \\ \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\theta\|^2 = R\langle w, \theta\rangle - \|\nabla\theta\|^2 \end{cases} \tag{4.9}$$

Utilizzando il metodo del parametro di accoppiamento di Joseph (come in [8]), moltiplichiamo $(4.9)_1$ per $\lambda > 0$ e sommiamo $(4.9)_2$ per ottenere

$$\frac{dE}{dt} = RI - \mathcal{D} \tag{4.10}$$

dove si è posto

$$\begin{cases} E(t) = \frac{\lambda}{2}\|\theta\|^2 \\ I(t) = (1+\lambda)\langle w, \theta\rangle \\ \mathcal{D}(t) = \|\mathbf{u}\|^2 + \lambda\|\nabla\theta\|^2 \end{cases}$$

Si definisce ancora R_E come

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\mathcal{H}} \frac{I}{\mathcal{D}} \tag{4.11}$$

dove lo spazio $\mathcal{H}$ delle soluzioni ammissibili è tale che $\mathbf{u} \in L^2(V)$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\theta \in H^1(V)$ e siano soddisfatte le condizioni al contorno $w = 0$ e $\theta = 0$ su $z = 0, 1$. Da (4.10) risulta ovviamente

$$\frac{dE}{dt} = R\mathcal{D}\frac{I}{\mathcal{D}} - \mathcal{D} \leq R\mathcal{D}\left(\max_{\mathcal{H}} \frac{I}{\mathcal{D}}\right) - \mathcal{D} = -\mathcal{D}\frac{R_E - R}{R_E}$$

Usando la disuguaglianza di Poincaré sulla definizione di $\mathcal{D}$, vale $\mathcal{D} \geq \|\mathbf{u}\|^2 + \lambda\pi^2\|\theta\|^2 \geq 2\pi^2 E$. Così il nostro criterio di stabilità non lineare è $R < R_E$, perciò, ponendo

$$\omega = 2\pi^2 \frac{R_E - R}{R_E} > 0$$

si arriva quindi alla disuguaglianza dell'energia

$$\frac{dE}{dt} \leq -\omega E$$

da cui, grazie al lemma di Gronwall[2],

$$E(t) \leq E(0)e^{-\omega t} \tag{4.12}$$

Abbiamo ottenuto che, per $R < R_E$, si ha stabilità non lineare incondizionata, cioè per ogni perturbazione iniziale e così per ogni $E(0)$. (4.12) comporta che $\|\theta(t)\|$ decresce esponenzialmente; ma anche $\|\mathbf{u}(t)\|$ decresce esponenzialmente poiché, usando la disuguaglianza della media aritmetica e geometrica[3], si deduce che

$$\|\mathbf{u}\|^2 = R\langle\theta, w\rangle \leq \frac{R^2}{2}\|\theta\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 \leq \frac{R^2}{2}\|\theta\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2$$

da cui $\|\mathbf{u}\|^2 \leq R^2\|\theta\|^2$.

Per determinare R_E per poi ottenere la soglia critica di stabilità non lineare, bisogna risolvere il problema variazionale (4.11). A questo scopo si determinano le equazioni di Eulero-Lagrange e, lavorando con perturbazioni ammissibili variate sincrone, mediante la variazione delle costanti, si massimizza rispetto al parametro di accoppiamento λ. Si rimanda a [8], sezione 4.2.4 per ulteriori dettagli sul problema variazionale (4.11). Riportiamo qui il risultato che si dimostra essere ottimale per R_E in corrispondenza di $\lambda = 1$: le equazioni di Eulero-Lagrange assumono quindi la forma

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla\pi - \mathbf{u} + R_E\theta\mathbf{k} \\ 0 = R_E w + \Delta\theta \end{cases} \tag{4.13}$$

che sono uguali alle (4.8) dell'analisi lineare. Pertanto, come già anticipato, si ha anche nel caso dei mezzi porosi che i numeri di Rayleigh critici per la stabilità lineare e non lineare coincidono, $R_c = R_E$. Questo risultato è valido per ogni dato iniziale. La soluzione di base stazionaria (4.2) è instabile per $R > R_c$ ed è globalmente stabile per $R < R_c$. Così, poiché $R_E = R_c$, il risultato è davvero ottimale.

[2] Appendice A, (6).
[3] Appendice A, (1).

4.1.3 Calcolo del numero di Rayleigh critico

Eliminiamo la pressione da $(4.13)_2$ prendendo il doppio rotore e proiettiamo sulla direzione verticale, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{k}$. Poiché $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = \Delta w - R\Delta^* \theta \\ 0 = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{4.14}$$

dove Δ^* indica sempre il laplaciano bidimensionale, e si è omesso il pedice di R, in virtù di $R_c = R_E$. Le condizioni al contorno sono le solite (4.6). Cerchiamo ora una soluzione della forma

$$\begin{cases} w = W(z)f(x,y) \\ \theta = \Theta(z)f(x,y) \end{cases}$$

dove $f(x,y)$ è una mappa che "piastrella" il piano. Come già sottolineato nell'osservazione 3, tipicamente f è la soluzione esagonale e soddisfa $\Delta^* f = -a^2 f$, dove a è il numero d'onda.

Si ponga l'operatore di derivazione $D = \frac{d}{dz}$ e si elimini θ da (4.14) per trovare $\Delta^2 w = -R^2 \Delta^* w$ ovvero

$$(D^2 - a^2)^2 W = R^2 a^2 W \tag{4.15}$$

Sfruttando le condizioni al bordo, è facile dedurre da (4.15) che $D^{2n}W = 0$ su $z = 0, 1$, pertanto scegliamo $W = \sin n\pi z$ e riscriviamo la (4.15) ricavando R^2 come

$$R^2 = \frac{(n^2\pi^2 + a^2)^2}{a^2}$$

Il minimo di $R^2(n, a^2)$, come funzione di n, si ha ovviamente per $n = 1$; il minimo di

$$R^2(a^2) = \frac{(\pi^2 + a^2)^2}{a^2} \tag{4.16}$$

si ha in corrispondenza del valore critico $a_c^2 = \pi^2$. Ciò porta alla conclusione che

$$R_c^2 = R_E^2 = 4\pi^2$$

e quindi, per numeri di Rayleigh al di sotto di questa soglia critica, non c'è instabilità e le perturbazioni tendono a zero con rapidità esponenziale, per ogni dato iniziale; nel caso contrario si ha instabilità e si assiste all'insorgenza di moti convettivi a carattere cellulare.

4.2 Problema di Bénard per le equazioni di Forchheimer

Se la velocità del fluido è elevata, le equazioni di Forchheimer

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k}\mathbf{v} - b|\mathbf{v}|\mathbf{v} - g\rho(T)\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \tag{4.17}$$

risultano più appropriate di quelle di Darcy nel descrivere il modello. Le condizioni al contorno, lo stato base e l'adimensionalizzazione sono gli stessi della sezione precedente, con l'aggiunta del numero adimensionale $F = \frac{kb\kappa}{\mu d}$ (detto numero di Forchheimer) per tenere conto del termine di Forchheimer aggiunto in questo caso. Le equazioni adimensionali per la perturbazione sono perciò

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla \pi - \mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} - F|\mathbf{u}|\mathbf{u} \\ \theta_t + \nabla\theta \cdot \mathbf{u} = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{4.18}$$

con le condizioni al contorno (4.6).

Nello studio della stabilità lineare trascuriamo i termini non lineari $\nabla\theta \cdot \mathbf{u}$ e $F|\mathbf{u}|\mathbf{u}$, arrivando alle stesse equazioni (4.7) del caso di Darcy. Pertanto la frontiera di stabilità lineare è la stessa di quella trovata in 4.1.1.

Per il metodo dell'energia applicato a (4.18) si procede nello stesso modo visto in 4.1.2, con l'aggiunta nell'equazione (4.10) del termine $F < |\mathbf{u}|^3 >$:

$$\frac{dE}{dt} = RI - \mathcal{D} - F < |\mathbf{u}|^3 >$$

dove $E, I, \mathcal{D}$ sono definiti come in precedenza. Tuttavia possiamo trascurare il termine di Forchheimer, poiché non positivo, e lavorare sulla disuguaglianza dell'energia differenziale

$$\frac{dE}{dt} \leq RI - \mathcal{D}$$

Da qui l'analisi è condotta nello stesso modo di 4.1.2, e porta alla stessa conclusione che $R_c^2 = R_E^2 = 4\pi^2$.

Riassumendo, in questa situazione il termine di Forchheimer non influenza il processo di stabilità o instabilità; assume invece un ruolo importante nel caso in cui le proprietà del fluido variano con la temperatura (ad esempio, la viscosità).

4.3 Problema di Bénard per le equazioni di Brinkman

Le equazioni per la convezione termica nel modello di Brinkman sono

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k}\mathbf{v} + \lambda \Delta \mathbf{v} - g\rho(T)\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \tag{4.19}$$

corredate dalle condizioni al contorno

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{su } z = 0, d \\ T = T_L \quad \text{su } z = 0 \\ T = T_U \quad \text{su } z = d \\ T_L > T_U \end{cases}$$

dove si prescrivono i valori di tutte le componenti della velocità sul bordo, a causa della presenza di un ordine di derivazione più elevato (secondo ordine, $\Delta \mathbf{v}$) rispetto ai precedenti casi di Darcy e Forchheimer.

Introducendo le stesse variabili adimensionali (4.4) e lo stesso numero di Rayleigh definito da $Ra = R^2 = \frac{\alpha g k \rho_0 \beta d^2}{\kappa \mu}$, con l'aggiunta di $\lambda^* = \frac{\lambda k}{d^2 \mu}$, e tralasciando gli asterischi, si scrive il sistema (cfr. (4.5)):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla \pi - \mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{u} + R\theta \mathbf{k} \\ \theta_t + \nabla \theta \cdot \mathbf{u} = Rw + \Delta \theta \end{cases} \tag{4.20}$$

Procedendo come per il modello Darcy, la teoria lineare conduce alle equazioni, separate nel tempo,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla \pi - \mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{u} + R\theta \mathbf{k} \\ \sigma\theta + \nabla \theta \cdot \mathbf{u} = Rw + \Delta \theta \end{cases} \tag{4.21}$$

da cui si dimostra che $\sigma \in \mathbb{R}$ e che quindi vale il principio dello scambio delle stabilità.

Per lo studio della stabilità non lineare con il metodo dell'energia, si ha $\frac{dE}{dt} = RI - \mathcal{D}$ dove ora

$$\begin{cases} E(t) = \frac{\xi}{2}\|\theta\|^2 \\ I(t) = (1+\xi)\langle w, \theta \rangle \\ \mathcal{D}(t) = \|\mathbf{u}\|^2 + \lambda \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \xi \|\nabla \theta\|^2 \end{cases}$$

con $\xi > 0$ parametro di accoppiamento. Definendo ancora

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\mathcal{H}} \frac{I}{\mathcal{D}} \tag{4.22}$$

dove $\mathcal{H} = \{\mathbf{u}, \theta \in H^1(V) | \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$ è lo spazio delle soluzioni ammissibili, si ottiene, se $R < R_E$,

$$\frac{dE}{dt} \leq -\mathcal{D}\frac{R_E - R}{R_E} = -\mathcal{D}b \leq -2\pi^2 bE$$

dove si è posto $b = \frac{R_E - R}{R_E} > 0$ e si è sfruttato il fatto che $\mathcal{D} \geq \xi\pi^2\|\theta\|^2 = 2\pi^2 E$, grazie alla disuguaglianza di Poincaré.
Questo porta a

$$E(t) \leq E(0)e^{-2\pi^2 bt}$$

cioè ad una stabilità globale in energia, per $R < R_E$.

Ancora una volta la variazione delle costanti applicata alle equazioni di Eulero-Lagrange che sorgono dal problema agli autovalori (4.22), porta a stabilire $\xi = 1$. In corrispondenza di questo valore le equazioni si riducono alle (4.21) con $\sigma = 0$. Pertanto concludiamo anche in questo caso che le soglie di stabilità lineare e non lineare coincidono, cioè $R_c^2 = R_E^2$, e che non sono possibili instabilità sotto-critiche.

Vogliamo ora determinare il valore critico $R_c = R_E = R$. Prendiamo il doppio rotore di $(4.21)_2$ per arrivare rapidamente al sistema

$$\begin{cases} \Delta w - \lambda\Delta^2 w - R\Delta^*\theta = 0 \\ Rw + \Delta\theta = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} w = 0 \quad \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 \quad \text{su } z = 0, 1 \end{cases}$$

più ulteriori condizioni, assegnate in base alla natura dei piani delimitanti lo strato: se essi sono fissi, il problema agli autovalori (4.23) è risolto numericamente; se sono liberi da stress tangenziali, si richiede $\Delta w = 0$ su $z = 0, 1$ e si può procedere analiticamente come segue.
Scriviamo $w = W(z)f(x, y)$, con $\Delta^* f = -a^2 f$, e sfruttando le condizioni al contorno, scegliamo $W(z) = \sin n\pi z$. Eliminando θ da (4.23), risulta che w deve soddisfare

$$(\lambda\Delta^3 - \Delta^2)w = R^2\Delta^* w$$

il che porta a

$$R^2 = \frac{1}{a^2}\left(\lambda(n^2\pi^2 + a^2)^3 + (n^2\pi^2 + a^2)^2\right) \tag{4.24}$$

Il valore minimo di R^2, come funzione di n, si ha per $n = 1$ e $\frac{dR^2}{da^2} = 0$ conduce al numero d'onda critico

$$a_c^2 = \frac{1}{4\lambda}\left(-(\lambda\pi^2+1)+(\lambda\pi^2+1)\sqrt{1+\frac{8\pi^2\lambda}{\lambda\pi^2+1}}\right) \tag{4.25}$$

Osservazione 11. In (4.24) e (4.25) per $\lambda \to 0$ otteniamo le espressioni del numero di Rayleigh e del numero d'onda critici, nel caso del mezzo poroso di Darcy (cfr. (4.16)); per $\lambda \to \infty$ otteniamo le espressioni nel caso del fluido classico (cfr. (2.17)).

4.4 Strato rotante

Consideriamo ora un caso fisicamente più interessante, studiando il problema di convezione termica in uno strato orizzontale di materiale poroso di Darcy saturato da un fluido in presenza di una rotazione uniforme attorno all'asse verticale. Supponendo sempre lo strato compreso tra i piani $z = 0$ e $z = d$, le equazioni adimensionali per la perturbazione per questo modello sono [6]

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{1}{Va}\mathbf{u}_t = -\nabla\pi - \mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} - T\,\mathbf{k}\times\mathbf{u} \\ \theta_t + \nabla\theta\cdot\mathbf{u} = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{4.26}$$

dove $\mathbf{u} = (u, v, w), \theta, \pi$ sono le perturbazioni ai campi di velocità, temperatura, pressione, e i parametri adimensionali caratteristici del problema sono, oltre al numero di Rayleigh R^2, il numero di Taylor T^2 (che dà una misura della velocità di rotazione dello strato), il numero di Vadasz $Va = \phi\frac{Pr}{Da}$ con ϕ porosità, Pr numero di Prandtl, $Da = \frac{k}{d^2}$ numero di Darcy, k permeabilità del mezzo poroso.

Al sistema (4.26) affianchiamo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} w = 0 \quad \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 \quad \text{su } z = 0, 1 \end{cases} \tag{4.27}$$

e supponiamo che $\mathbf{u}, \theta, \pi$ soddisfino una condizione di periodicità nel piano x, y.

Restringiamoci alla teoria classica di Darcy, considerando $Va \to \infty$, e mettiamoci nel caso di piani liberi da stress tangenziali. Si può mostrare [6] che la soglia critica per la stabilità non lineare a cui arriveremo è uguale a quella per l'instabilità lineare, ovvero non sono possibili instabilità sottocritiche (al contrario di quanto avviene nel problema di Bénard per un fluido rotante [1]).

Prendendo il rotore e il doppio rotore di $(4.26)_2$ si ottengono

$$\omega = T\mathbf{u}_z + R(\theta_y \mathbf{i} - \theta_x \mathbf{j}) \tag{4.28}$$

e

$$\Delta\mathbf{u} + T\omega_z = R(\mathbf{k}\Delta^*\theta - \theta_{xz}\mathbf{i} - \theta_{yz}\mathbf{j}) \tag{4.29}$$

dove ω è il vettore vorticità e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è la terna dei versori cartesiani.
Moltiplicando scalarmente $(4.26)_2$ per $\mathbf{u}$ e integrando sulla cella di periodicità V, si ricava dopo qualche passaggio

$$\|\mathbf{u}\|^2 = R\langle\theta, w\rangle \tag{4.30}$$

Prima di procedere con l'analisi della stabilità non lineare, si devono effettuare alcune osservazioni sulle condizioni al contorno. In particolare, poiché $\omega = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y)$, da (4.28) risulta $\omega_1 = Tu_z + R\theta_y$ e $\omega_2 = Tv_z - R\theta_x$, da cui usando le (4.27) troviamo

$$\begin{cases} \omega_1 = -v_z \quad \text{e} \quad \omega_1 = Tu_z \quad \text{su } z = 0,1 \\ \omega_2 = u_z \quad \text{e} \quad \omega_2 = Tv_z \quad \text{su } z = 0,1 \end{cases}$$

cioè

$$u_z = v_z = 0 \quad \text{su } z = 0,1 \qquad \text{e} \qquad \omega_1 = \omega_2 = 0 \quad \text{su } z = 0,1 \tag{4.31}$$

Inoltre dalla (4.28) si ha $\omega_3 = Tw_z$ e quindi $Tw_{zz} = v_{xz} - u_{yz}$; pertanto $w_{zz} = 0$ su $z = 0,1$ per la (4.31). Poi da $(4.26)_3$ è evidente che $\theta_{zz} = 0$ su $z = 0,1$. Seguendo il processo illustrato in [6], è possibile ricavare le condizioni al contorno sulle derivate di ordine pari

$$\begin{cases} w^{(2n)} = 0 \quad \text{su } z = 0,1 \\ \theta^{(2n)} = 0 \quad \text{su } z = 0,1 \end{cases} \tag{4.32}$$

con $n \geq 0$ intero.

Moltiplichiamo $(4.26)_3$ per θ e integriamo su V; moltiplichiamo la terza componente dell'equazione vettoriale (4.29) per w, integriamo su V e usiamo la terza componente di (4.28), per trovare rispettivamente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 = R\langle w, \theta\rangle - \|\nabla\theta\|^2 \tag{4.33}$$

$$0 = R\langle\nabla^*\theta, \nabla^* w\rangle - \|\nabla w\|^2 - T^2\|w_z\|^2 \tag{4.34}$$

dove si è indicato $\nabla^* = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0)$.
Scegliendo un parametro di accoppiamento $\xi > 0$ per legare (4.33) e (4.34), otteniamo l'equazione per l'energia

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 = RI - \mathcal{D} \tag{4.35}$$

dove si è posto

$$\begin{cases} I = \langle w, \theta \rangle + \xi \langle \nabla^* \theta, \nabla^* w \rangle \\ \mathcal{D} = \|\nabla \theta\|^2 + \xi \left(\|\nabla w\|^2 + T^2 \|w_z\|^2 \right) \end{cases}$$

Definendo poi

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\mathcal{H}} \frac{I}{\mathcal{D}} \tag{4.36}$$

dove $\mathcal{H}$ è ancora lo spazio delle soluzioni ammissibili, da (4.35) risulta subito

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 \leq -\mathcal{D} \frac{R_E - R}{R_E}$$

Se $R < R_E$, usando la disuguaglianza di Poincaré troviamo la stima $\mathcal{D} \geq \pi^2 \|\theta\|^2$, e quindi la relazione precedente evidenzia che $\|\theta(t)\| \to 0$ almeno esponenzialmente. Inoltre da (4.30), ragionando come in 4.1.2, risulta che anche $\|\mathbf{u}\| \to 0$ esponenzialmente in quanto $\|\mathbf{u}\|^2 \leq R^2 \|\theta\|^2$.

Il valore critico per la stabilità non lineare è da determinarsi risolvendo il problema variazionale (4.36). Le equazioni di Eulero-Lagrange ad esso relative sono

$$\begin{cases} R_E \mathbf{k}(\theta - \xi \Delta^* \theta) + 2\mathbf{k}\xi(\Delta w + T^2 w_{zz}) = \nabla \pi \\ R_E(w - \xi \Delta^* w) + 2\Delta \theta = 0 \end{cases} \tag{4.37}$$

dove $\pi(\mathbf{x})$ è sempre un moltiplicatore di Lagrange. Supponiamo che w, θ siano della forma

$$\begin{cases} w = W(z) f(x,y) \\ \theta = \Theta(z) f(x,y) \end{cases}$$

con f che soddisfa $\Delta^* f + a^2 f = 0$ dove $a > 0$ è il numero d'onda. Prendendo il doppio rotore di $(4.37)_1$ e ponendo $D = \frac{d}{dz}$, troviamo che

$$\begin{cases} 2\xi \left((1 + T^2) D^2 - a^2 \right) W + R_E (1 + \xi a^2) \Theta = 0 \\ 2(D^2 - a^2)\Theta + R_E(1 + \xi a^2) W = 0 \end{cases}$$

da cui, scegliendo $W = \sin n\pi z$, $\Theta = \sin n\pi z$ in virtù delle condizioni (4.32), risulta

$$R_E^2 = \frac{4\xi \left(n^2\pi^2(1 + T^2) + a^2 \right) \left(n^2\pi^2 + a^2 \right)}{(1 + \xi a^2)^2} \tag{4.38}$$

Indicando con R_c^2 la soglia critica, si ha $R_c^2 = \min_{n,a^2} R_E^2(n, a^2)$. Minimizziamo (4.38) prendendo $n = 1$ e scegliamo $\xi = \frac{1}{a^2}$ per arrivare al numero di Rayleigh critico

$$R_E^2 = \frac{1}{a^2} \left((\pi^2 + a^2)^2 + \pi^2 T^2 (\pi^2 + a^2) \right) \tag{4.39}$$

In assenza di rotazione, cioè quando il numero di Taylor è $T = 0$, si ritrova la (4.16) del caso Darcy. La formula (4.39) mette già in evidenza l'effetto stabilizzante della rotazione. Infatti da $\frac{d}{da^2} R_E^2(a^2) = 0$ si ottiene $a^4 = \pi^4(1 + T^2)$, cioè $a_c^2 = \pi^2\sqrt{1 + T^2}$; per $T = 0$ si ritrova $a_c^2 = \pi^2$. Dunque $R_c^2 = R_E^2(a_c^2)$ è senz'altro maggiore di $4\pi^2$, corrispondente alla soglia critica in assenza di rotazione.

Appendice A

Relazioni vettoriali utili

Riportiamo un elenco di disuguaglianze e identità utili in fisica matematica, e che abbiamo impiegato frequentemente nella stesura di questa tesi.

1. Disuguaglianza della media aritmetica-geometrica, con peso costante $\alpha > 0$, per u, v grandezze scalari:

   $$2uv \leq \alpha u^2 + \frac{1}{\alpha} v^2$$

   o in forma integrale

   $$2 \int_\Omega uv \, dx \leq \alpha \int_\Omega u^2 \, dx + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega v^2 \, dx$$

   La sua validità discende facilmente da $\left(\frac{u}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} v \right)^2 \geq 0$.

2. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

   $$\int_\Omega uv \, dx \leq \left(\int_\Omega u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Disuguaglianza di Hölder:

   $$\int_\Omega uv \, dx \leq \left(\int_\Omega u^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega v^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

   dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $p, q > 1$.

4. Disuguaglianza di Young:

   $$\int_\Omega uv \, dx \leq \frac{1}{p} \int_\Omega u^p \, dx + \frac{1}{q} \int_\Omega v^q \, dx$$

o in forma locale

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $p, q > 1$.

5. Disuguaglianza di Poincaré:
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato in almeno una direzione e $1 \leq p < \infty$. Allora esiste una costante C_p dipendente solo da Ω (ovvero dalla geometria del dominio) e da p tale che

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \geq C_p \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (spazio di Sobolev).
Nel caso tridimensionale affrontato, il dominio è lo strato orizzontale di fluido (limitato nella direzione verticale) e la disuguaglianza è stata applicata utilizzando la norma di $L^2(\Omega)$:

$$\|\nabla \mathbf{u}\|^2 \geq C_p \|\mathbf{u}\|^2$$

6. Disuguaglianza (o lemma) di Gronwall:
Sia $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo reale con $a < b$ (b anche infinito); siano u e γ funzioni continue su I a valori reali. Se u è differenziabile sulla parte interna $\text{int}(I)$ e soddisfa la disuguaglianza differenziale

$$\frac{d}{dt} u(t) \leq \gamma(t) u(t) \qquad t \in \text{int}(I)$$

allora u è limitata superiormente da

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t \gamma(s)\, ds\right) \qquad \forall\, t \in I$$

Infatti, se $v(t) = \exp\left(\int_a^t \gamma(s)\, ds\right)$ è soluzione di $\frac{d}{dt} v(t) \leq \gamma(t) v(t)$ con $v(a) = 1$, allora $v(t) > 0\ \forall\, t$, ed è lecito usare la regola di derivazione del quoziente

$$\frac{d}{dt}\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2} \leq \frac{\gamma uv - \gamma vu}{v^2} = 0 \quad \text{per } t > a$$

da cui

$$\frac{u(t)}{v(t)} \leq \frac{u(a)}{v(a)} = u(a)$$

che prova la tesi.

Inoltre, se indichiamo con f, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispettivamente un campo scalare e due campi vettoriali regolari, valgono le seguenti identità:

7. $u_j u_{i,j} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$
8. $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{u}$
   $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \nabla u^2 = 2(\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{u}$
9. $(\nabla\mathbf{u})(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \frac{1}{2}\nabla u^2$
10. $\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \text{ rot rot}\,\mathbf{u}$
11. $(\Delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot ((\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{u}) - \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}$
    Infatti $u_{i,jj}u_i = (u_{i,j}u_i)_j - u_{i,j}u_{i,j}$
12. $\nabla \cdot (f\,\mathbf{v}) = f\,\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla f \cdot \mathbf{v}$
13. $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v}$ dove $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j$ tensore diade
    Infatti lavorando per componenti e ricordando $(\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \mathbf{T}_{ij,j}$, risulta:

    $$(\nabla \cdot (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}))_i = ((\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})_{ij})_{,j} = (u_i v_j)_{,j} = u_i v_{j,j} + u_{i,j}v_j = (\mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v})_i$$

14. $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = \text{ rot}\,\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2$
15. $\text{rot}\,(\nabla f) = \mathbf{0}$
16. $\nabla \cdot (\text{ rot}\,\mathbf{v}) = 0$

Bibliografia

[1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.* Dover, New York, 1981.

[2] M. Gentile. *Sull'insorgere della convezione naturale per viscosità variabili con la temperatura.* Tesi di Dottorato di Ricerca, Università degli studi di Napoli, 1995.

[3] M. E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*, Vol. 158, *Mathematics in Sciences and Engineering.* 2003.

[4] M. Renardy e R. C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 2ª ediz., 2004.

[5] B. Straughan. Convection in a variable gravity field. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 140:467–475, 1989.

[6] B. Straughan. A sharp nonlinear stability threshold in rotating porous convection. *Proceedings of the Royal Society A*, 457:87–93, 2001.

[7] B. Straughan. *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*, Vol. 91, *Appl. Math. Sci. Ser.* Springer-Verlag, 2ª ediz., 2004.

[8] B. Straughan. *Stability and Wave Motion in Porous Media*, Vol. 165, *Appl. Math. Sci. Ser.* Springer-Verlag, 2008.