

Aspetti matematici e fisici della convezione termica di Bénard-Rayleigh

Michele Antonelli

17 Luglio 2009

Outline

- 1 Equazioni di Navier-Stokes e approssimazione di Boussinesq
 - Approssimazione di Boussinesq
- 2 Problema di Bénard
 - Descrizione del problema
 - Analisi della stabilità
 - Sorgenti di calore interne
 - Campo di gravità variabile
- 3 Mezzi porosi
 - Modelli di Darcy, Forchheimer, Brinkman
- 4 Convezione termica in mezzi porosi
 - Problema di Bénard per le equazioni di Darcy
 - Problema di Bénard per le equazioni di Forchheimer
 - Problema di Bénard per le equazioni di Brinkman
 - Strato rotante

Approssimazione di Boussinesq

- La sola forza agente sul fluido è la forza di gravità
- I moti convettivi sono di tipo isocorico
- I gradienti di velocità sono abbastanza piccoli da ignorarne l'effetto sulla temperatura di conversione del lavoro in calore
- Le variazioni di densità sono dovute a variazioni di temperatura, ma non di pressione
- I coefficienti presenti sono costanti positive
- Le accelerazioni promosse nel fluido a causa delle variazioni di densità sono più piccole di quelle relative all'accelerazione di gravità

Approssimazione di Boussinesq

Equazione di stato: legame densità-temperatura

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (1)$$

Approssimazione di Boussinesq

Equazione di stato: legame densità-temperatura

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (1)$$

Coefficienti costanti positivi

$$\chi, \mu, \xi \geq 0$$

Approssimazione di Boussinesq

Equazione di stato: legame densità-temperatura

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (1)$$

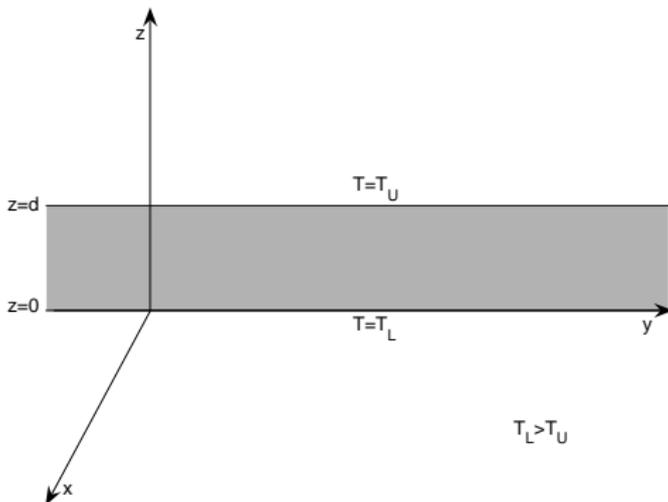
Coefficienti costanti positivi

$$\chi, \mu, \xi \geq 0$$

Equazioni nell'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0))g\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T + r \end{cases} \quad (2)$$

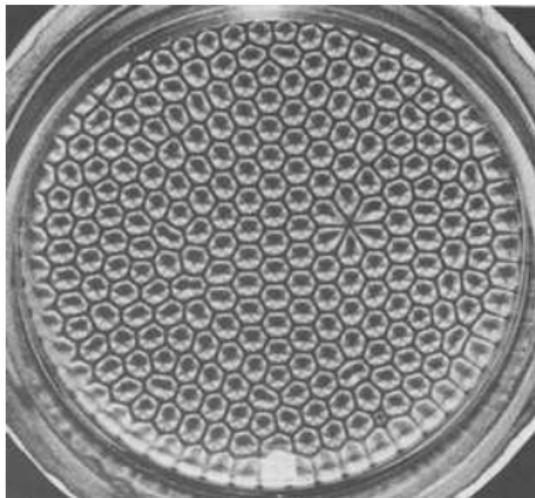
Problema di Bénard classico



Configurazione geometrica del modello.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} \times (0, d)$$

Problema di Bénard classico



Celle di Bénard: struttura reticolare entro cui si svolgono i moti convettivi. Il “glitch” è dovuto a irregolarità nel fondo del contenitore.

Problema di Bénard classico

Sistema nell'approssimazione di Boussinesq:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0)) g \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T + r \end{cases} \quad (3)$$

Problema di Bénard classico

Sistema nell'approssimazione di Boussinesq:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0)) g \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \quad (3)$$

Problema di Bénard classico

Sistema nell'approssimazione di Boussinesq:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0)) g \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \quad (3)$$

Condizioni al contorno per la temperatura:

$$\begin{cases} T = T_L & \text{su } z = 0 \\ T = T_U & \text{su } z = d \end{cases} \quad (4)$$

con $T_L > T_U$ costanti.

Condizione di aderenza ai bordi per la velocità:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{su } z = 0, d \quad (5)$$

Soluzione di conduzione stazionaria

Soluzione di conduzione stazionaria:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \\ T_s(z) = -\beta z + T_L \\ p_s(z) = -\rho_0 g(1 + \alpha(T_0 - T_L))z - \frac{\rho_0 g \alpha \beta}{2} z^2 \end{cases} \quad (6)$$

con $\beta = \frac{T_L - T_U}{d}$ gradiente verticale costante di temperatura.

Analisi della stabilità

Moto perturbato:

$$(\mathbf{v}_s + \mathbf{u}, T_s + \theta, p_s + \pi) \quad (7)$$

Analisi della stabilità

Moto perturbato:

$$(\mathbf{v}_s + \mathbf{u}, T_s + \theta, p_s + \pi) \quad (7)$$

Equazioni per la perturbazione:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{u} - \alpha \theta g \mathbf{k} \\ \theta_t + \nabla T_s(z) \cdot \mathbf{u} + \nabla \theta \cdot \mathbf{u} = \kappa \Delta \theta \end{cases} \quad (8)$$

Analisi della stabilità

Adimensionalizzazione:

$$\begin{cases} U = \frac{\nu}{d} & \mathcal{T} = \frac{d^2}{\nu} & \tilde{T} = U \sqrt{\frac{\beta \nu}{\kappa \alpha g}} & P = \frac{\rho_0 \nu^2}{d^2} \\ t = t^* \mathcal{T} & \mathbf{x} = \mathbf{x}^* d & & \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* U & \theta = \theta^* \tilde{T} & \pi = \pi^* P & \end{cases} \quad (9)$$

Numero di Prandtl:

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

Numero di Rayleigh:

$$Ra = R^2 = \frac{\alpha g \beta d^4}{\kappa \nu}$$

Analisi della stabilità

Equazioni adimensionalizzate:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} = -\nabla \pi + \Delta \mathbf{u} + R\theta \mathbf{k} \\ Pr(\theta_t + \nabla \theta \cdot \mathbf{u}) = Rw + \Delta \theta \end{cases} \quad (10)$$

dove $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 & \text{su } z = 0, 1 \end{cases} \quad (11)$$

Analisi della stabilità

Cella di periodicità

$$V = \left[0, \frac{2\pi}{a_x}\right] \times \left[0, \frac{2\pi}{a_y}\right] \times [0, 1]$$

con $a_x, a_y > 0$ pulsazioni parziali e $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ numero d'onda orizzontale.

Stabilità lineare

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t = -\nabla \pi + \Delta \mathbf{u} + R\theta \mathbf{k} \\ Pr\theta_t = R w + \Delta \theta \end{cases} \quad (12)$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 & \text{su } z = 0, 1 \end{cases}$$

Stabilità lineare

Soluzioni separate nel tempo:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \mathbf{u}_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \\ \theta(\mathbf{x}, t) = \hat{\theta}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \theta_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \\ \pi(\mathbf{x}, t) = \hat{\pi}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \pi_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \end{cases} \quad (13)$$

Stabilità lineare

Soluzioni separate nel tempo:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \mathbf{u}_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \\ \theta(\mathbf{x}, t) = \hat{\theta}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \theta_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \\ \pi(\mathbf{x}, t) = \hat{\pi}(\mathbf{x})e^{\sigma t} = \pi_1(z)e^{i(a_x x + a_y y)}e^{\sigma t} \end{cases} \quad (13)$$

Sistema separato nel tempo:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \sigma \mathbf{u} = -\nabla \pi + \Delta \mathbf{u} + R\theta \mathbf{k} \\ \sigma Pr\theta = R w + \Delta \theta \end{cases} \quad (14)$$

Principio dello scambio delle stabilità

Forma forte

$$\sigma \in \mathbb{R}$$

Forma debole

$$\sigma_i \neq 0 \Rightarrow \sigma_r < 0$$

Risultato

Nella convezione classica di Bénard il parametro di stabilità σ è sempre reale.

Stabilità lineare

- **Frontiere rigide** (soluzione numerica)

Si ammette che non ci sia slittamento:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 & \text{su } z = 0, 1 \end{cases} \quad \text{no-slip}$$

- **Frontiere libere** (soluzione analitica)

Si richiede che i piani siano liberi da sforzi tangenziali:

$$\begin{cases} u_z = v_z = 0 & \text{su } z = 0, 1 \\ w = 0 & \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 & \text{su } z = 0, 1 \end{cases}$$

Stabilità lineare

$$\frac{d^2}{dz^2} W(z) = 0 \quad \text{su } z = 0, 1$$

$\Rightarrow W(z) = \widetilde{W} \sin n\pi z$ con $n \in \mathbb{N}$ e \widetilde{W} ampiezza costante non nulla.

Stabilità lineare

$$\frac{d^2}{dz^2} W(z) = 0 \quad \text{su } z = 0, 1$$

$\Rightarrow W(z) = \widetilde{W} \sin n\pi z$ con $n \in \mathbb{N}$ e \widetilde{W} ampiezza costante non nulla.

Numero di Rayleigh critico:

$$R_c^2 = \frac{27}{4} \pi^4$$

Numero d'onda critico:

$$a_c = \sqrt{\frac{\pi^2}{2}}$$

Stabilità non lineare

Sistema adimensionalizzato:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} = -\nabla \pi + \Delta \mathbf{u} + R\theta \mathbf{k} \\ Pr(\theta_t + \nabla \theta \cdot \mathbf{u}) = Rw + \Delta \theta \end{cases}$$

Stabilità non lineare

Sistema adimensionalizzato:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} = -\nabla \pi + \Delta \mathbf{u} + R\theta \mathbf{k} \\ Pr(\theta_t + \nabla \theta \cdot \mathbf{u}) = Rw + \Delta \theta \end{cases}$$

Energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} Pr \|\theta\|^2 \quad (15)$$

Stabilità non lineare

$$\frac{dE}{dt} = RI - \mathcal{D} \leq -\mathcal{D}R \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_E} \right) \quad (16)$$

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\mathcal{H}} \frac{I}{\mathcal{D}} \quad (17)$$

dove

$$I = 2 \int_V w \theta \, dx$$

$$\mathcal{D} = \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \theta\|^2$$

$$\mathcal{H} = \{ \mathbf{u}, \theta \in H_0^1(V) \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \}$$

Stabilità non lineare

Equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ -\nabla \pi + \Delta \mathbf{u} + R_E \theta \mathbf{k} = 0 \\ R_E w + \Delta \theta = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Stabilità non lineare

Equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ -\nabla \pi + \Delta \mathbf{u} + R_E \theta \mathbf{k} = 0 \\ R_E w + \Delta \theta = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Cfr. (14) con $\sigma = 0$, si ha $R^2 = R_E^2$.

Sorgenti di calore interne

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0)) g \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T + r \end{cases} \quad (19)$$

Sorgenti di calore interne

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0)) g \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T + r \end{cases} \quad (19)$$

Temperatura stazionaria:

$$T_s(z) = -\frac{r}{2\kappa} z^2 + \left(\frac{rd}{2\kappa} - \beta \right) z + T_L$$

Sorgenti di calore interne

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0)) g \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T + r \end{cases} \quad (19)$$

Temperatura stazionaria:

$$T_s(z) = -\frac{r}{2\kappa} z^2 + \left(\frac{rd}{2\kappa} - \beta \right) z + T_L$$

Numero di Rayleigh:

$$Ra = R^2 = \frac{|r| \alpha g d^5}{2\nu \kappa^2}$$

Campo di gravità variabile

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0))g(1 + \epsilon h(z)) \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \quad (20)$$

Campo di gravità variabile

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - (1 - \alpha(T - T_0))g(1 + \epsilon h(z)) \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \quad (20)$$

Osservazione

$h < 0$ (gravità decrescente): stabilizzante

$h > 0$ (gravità crescente): destabilizzante

Mezzi porosi

- **Esempi:** lava, sabbia, legno, cemento, ossa
- **Applicazioni:** geofisica, astrofisica, edilizia, medicina, aeronautica, industria automobilistica

Definizione: **Porosità**

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\text{volume dello spazio vuoto (pori)}}{\text{volume totale (inclusa matrice solida)}}$$

$$0 \leq \phi \leq 1$$

Modelli di Darcy, Forchheimer, Brinkman

Legge di Darcy (1856)

$$\begin{array}{ll} \text{1-dim} & \mu u = -k \frac{dp}{dx} \\ \text{3-dim} & 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \end{array}$$

Modelli di Darcy, Forchheimer, Brinkman

Legge di Darcy (1856)

$$\text{1-dim} \quad \mu u = -k \frac{dp}{dx}$$

$$\text{3-dim} \quad 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}$$

Modello di Forchheimer (1901)

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} - b |\mathbf{v}| \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad \text{con } b > 0.$$

Modelli di Darcy, Forchheimer, Brinkman

Legge di Darcy (1856)

$$\begin{array}{ll} 1\text{-dim} & \mu u = -k \frac{dp}{dx} \\ 3\text{-dim} & 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \end{array}$$

Modello di Forchheimer (1901)

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} - b |\mathbf{v}| \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad \text{con } b > 0.$$

Modello di Brinkman (1947)

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \lambda \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad \text{con } \lambda > 0.$$

Convezione termica nel modello di Darcy

Equazioni del problema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} - g\rho(T)\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \quad (21)$$

Adimensionalizzazione:

$$\begin{cases} \tilde{T} = dU \sqrt{\frac{\beta\mu}{\kappa\alpha g k \rho_0}} & R = \sqrt{\frac{\alpha g k \rho_0 \beta d^2}{\kappa\mu}} & P = \frac{\mu U d}{k} \\ t = t^* \frac{d^2}{\kappa} & \mathbf{x} = \mathbf{x}^* d \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* U & \theta = \theta^* \tilde{T} & \pi = \pi^* P \end{cases} \quad (22)$$

Equazioni per la perturbazione (adimensionalizzate):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ 0 = -\nabla \pi - \mathbf{u} + R\theta\mathbf{k} \\ \theta_t + \nabla \theta \cdot \mathbf{u} = R w + \Delta \theta \end{cases} \quad (23)$$

Convezione termica nel modello di Darcy

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} w = 0 & \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 & \text{su } z = 0, 1 \end{cases}$$

Osservazione

È sufficiente assegnare (oltre alla temperatura) la componente normale della velocità sul bordo, in quanto nell'equazione della quantità di moto, per la legge di Darcy, è presente solo il termine \mathbf{u} .

Stabilità lineare e non lineare

Numeri di Rayleigh critici:

$$R_c^2 = R_E^2$$

Risultato

Le frontiere di stabilità lineare e non lineare coincidono.
⇒ Non sono possibili instabilità sotto-critiche.

Stabilità lineare e non lineare

Numeri di Rayleigh critici:

$$R_c^2 = R_E^2$$

Risultato

Le frontiere di stabilità lineare e non lineare coincidono.
⇒ Non sono possibili instabilità sotto-critiche.

Determinazione del valore critico:

$$(D^2 - a^2)^2 W = R^2 a^2 W \quad (24)$$

posto $D = \frac{d}{dz}$ operatore di derivazione rispetto a z .

$$R^2(n, a^2) = \frac{(n^2 \pi^2 + a^2)^2}{a^2} \quad (25)$$

Stabilità lineare e non lineare

Numeri di Rayleigh critici:

$$R_c^2 = R_E^2 = 4\pi^2$$

Risultato

Le frontiere di stabilità lineare e non lineare coincidono.

⇒ Non sono possibili instabilità sotto-critiche.

Determinazione del valore critico:

$$(D^2 - a^2)^2 W = R^2 a^2 W \quad (24)$$

posto $D = \frac{d}{dz}$ operatore di derivazione rispetto a z .

$$R^2(n, a^2) = \frac{(n^2\pi^2 + a^2)^2}{a^2} \quad (25)$$

Convezione termica nel modello di Forchheimer

Equazioni del problema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} - b|\mathbf{v}|\mathbf{v} - g\rho(T)\mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \quad (26)$$

Numero di Forchheimer: $F = \frac{kb\kappa}{\mu d}$

Numeri di Rayleigh critici: $R_c^2 = R_E^2 = 4\pi^2$

Osservazione

I risultati coincidono con quelli ottenuti per il modello di Darcy.

Convezione termica nel modello di Brinkman

Equazioni del problema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \lambda \Delta \mathbf{v} - g\rho(T) \mathbf{k} \\ T_t + \nabla T \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta T \end{cases} \quad (27)$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{su } z = 0, d \\ T = T_L & \text{su } z = 0 \\ T = T_U & \text{su } z = d \\ T_L > T_U \end{cases} \quad (28)$$

Convezione termica nel modello di Brinkman

Numeri di Rayleigh critici:

$$R_C^2 = R_E^2$$

Convezione termica nel modello di Brinkman

Numeri di Rayleigh critici:

$$R_c^2 = R_E^2 = \frac{1}{a_c^2} (\lambda(\pi^2 + a_c^2)^3 + (\pi^2 + a_c^2)^2)$$

$$\text{con } a_c^2 = \frac{1}{4\lambda} \left(-(\lambda\pi^2 + 1) + (\lambda\pi^2 + 1) \sqrt{1 + \frac{8\pi^2\lambda}{\lambda\pi^2 + 1}} \right).$$

Osservazione

$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow$ Darcy

$\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow$ Fluido classico

Strato rotante

Equazioni adimensionali per la perturbazione:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{1}{Va} \mathbf{u}_t = -\nabla \pi - \mathbf{u} + R\theta \mathbf{k} - T \mathbf{k} \times \mathbf{u} \\ \theta_t + \nabla \theta \cdot \mathbf{u} = Rw + \Delta \theta \end{cases} \quad (29)$$

Parametri adimensionali caratteristici:

- Numero di Rayleigh $Ra = R^2$
- Numero di Taylor T^2
- Numero di Vadasz $Va = \phi \frac{Pr}{Da}$,
con Pr numero di Prandtl, $Da = \frac{k}{d^2}$ numero di Darcy.

Strato rotante

- Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} w = 0 & \text{su } z = 0, 1 \\ \theta = 0 & \text{su } z = 0, 1 \end{cases}$$

- Condizione di periodicità nel piano x, y .
- Teoria classica di Darcy: $Va \rightarrow \infty$.
- Piani liberi da stress tangenziali.

Strato rotante

$$R_E^2 = \frac{1}{a^2} ((\pi^2 + a^2)^2 + \pi^2 T^2 (\pi^2 + a^2)) \quad (30)$$

Osservazione

In assenza di rotazione (numero di Taylor $T = 0$), si ricade nel caso Darcy.

Osservazione

La rotazione ha un effetto stabilizzante, cioè

$$R_c^{rot} > R_c^{Darcy}$$