

1 Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

determinarne:

- a) dominio, limiti significativi, asintoti;
- b) derivata prima, crescita, punti di massimo e di minimo;
- c) derivata seconda, concavità, eventuali flessi;
- d) grafico.

2 Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$ al grafico della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\sin x}$$

3 Mentre viene schiacciato, un blocco di argilla del volume costante di 4500 centimetri cubi mantiene la forma di parallelepipedo a base quadrata. Sapendo che in un certo istante il lato di base misura 30 centimetri e che esso sta aumentando alla velocità di 2 centimetri al minuto, determinare la velocità con cui diminuisce l'altezza in quell'istante.

4 Calcolare l'area della regione di piano cartesiano compresa fra i grafici delle funzioni

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \text{e} \quad g(x) = -2x \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

5 Nel sistema cartesiano (O, x, y, z) considerare il piano α di equazione

$$x + y - 2z - 2 = 0$$

e la retta r avente le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

- a) Scrivere un'equazione del piano passante per la retta r e il punto $Q(1, 1, 1)$.
- b) Trovare le coordinate del punto P intersezione di α e r .
- c) Calcolare l'area del triangolo PQR , dove $R = (2, 0, 3)$.

Alcune risposte:

1] $f(x) > 0$ sempre; $y' = \frac{e^x(x^2-2x)}{e^x(x^2-4x+6)}$, min. rel. in $x = 2$; $y'' = \frac{x}{e^x(x^2-4x+6)}$, sempre convessa.

2] $y = \sqrt{\sin \frac{x}{2}} + 2\sqrt{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}$; $x = \frac{\pi}{2}$; e quindi $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$, dato che $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3] Velocità: $-\frac{3}{2} \approx -0.67$ centimetri al minuto.

4] Area: $1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{1} \log 2$ (valore approssimato 1.4388).

5] a) Piano $x - y + z - 1 = 0$; b) punto $P(1, -1, -1)$; c) area: $\sqrt{11}$.