Esercizio. *Studiare la funzione:* $f(x) = 3x - x\log x$.

Risoluzione. Dominio: $x > 0$.
Limiti significativi: Per il limite a 0^+ dobbiamo prima calcolare (forma $0 \cdot \infty$):

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Perciò:

$$\lim_{x\to 0^+} (3x - x\log x) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x(3 - \log x) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$

Asintoti: a $+\infty$ non c'è asintoto obliquo perché:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} (3 - \log x) = -\infty$$

Derivata prima:

$$f'(x) = 3 - \log x - x \cdot \frac{1}{x} = 2 - \log x$$

La condizione $f'(x) > 0$ vale per $\log x < 2$, cioè $x < e^2$.
La funzione è crescente in $0 < x < e^2$, decrescente per $x > e^2$.
Il punto e^2 è di massimo relativo (ed assoluto), con:

$$f(e^2) = 3e^2 - e^2 \cdot 2 = e^2$$

Attacco in 0^+:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2 - \log x) = 2 - (-\infty) = +\infty$$

Avvicinandosi a 0 l'inclinazione della retta tangente tende alla verticale.

Derivata seconda. Da $f'(x) = 2 - \log x$ consegue:

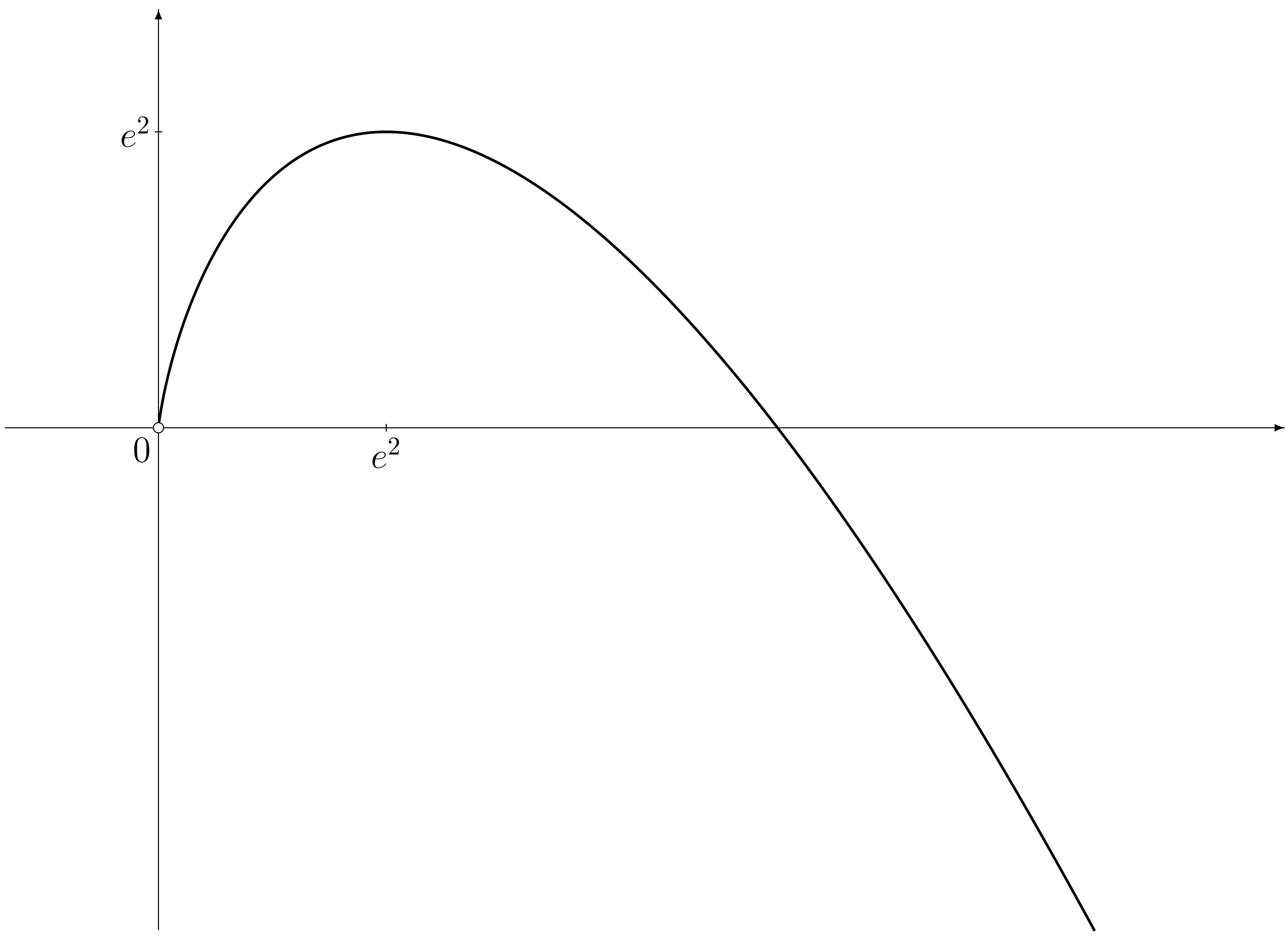
$$f''(x) = -\frac{1}{x}$$

Per ogni x (del dominio) si ha:

$$f''(x) < 0$$

Per ogni x la funzione è concava (concavità verso il basso) e non ci sono flessi.

Grafico:



Esercizio. *Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa* $\boldsymbol{e}$ *al grafico della funzione:*

$$\boldsymbol{f(x) = \log x + \sqrt{x^2+5}}$$

Risoluzione. Abbiamo:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ascissa: } x_0 &= e \\ \text{ordinata: } f(x_0) &= 1 + \sqrt{e^2+5} \\ \text{coefficiente angolare: } f'(x_0) &= \frac{1}{e} + \frac{e}{\sqrt{e^2+5}} \end{aligned}$$

La retta richiesta ha equazione $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, cioè:

$$y = 1 + \sqrt{e^2+5} + \left(\frac{1}{e} + \frac{e}{\sqrt{e^2+5}}\right)(x - e)$$

Si può scrivere un po' meglio:

$$\begin{aligned} y &= 1 + \sqrt{e^2+5} + \left(\frac{1}{e} + \frac{e}{\sqrt{e^2+5}}\right)x - \frac{e}{e} - \frac{e^2}{\sqrt{e^2+5}} \\ y &= \left(\frac{1}{e} + \frac{e}{\sqrt{e^2+5}}\right)x + \sqrt{e^2+5} - \frac{e^2}{\sqrt{e^2+5}} \\ y &= \left(\frac{1}{e} + \frac{e}{\sqrt{e^2+5}}\right)x + \frac{e^2+5-e^2}{\sqrt{e^2+5}} \end{aligned}$$

In conclusione:

$$y = \left(\frac{1}{e} + \frac{e}{\sqrt{e^2+5}}\right)x + \frac{5}{\sqrt{e^2+5}}$$

Esercizio. *Una scala a pioli lunga* 5 *metri è appoggiata ad un muro e sta scivolando verso terra. Sapendo che in un certo istante il piede A della scala dista* 3 *metri dal muro e che la sommità si sta abbassando alla velocità di* 0.9 *metri al secondo, determinare la velocità con cui si allontana A dal muro in quell'istante.*

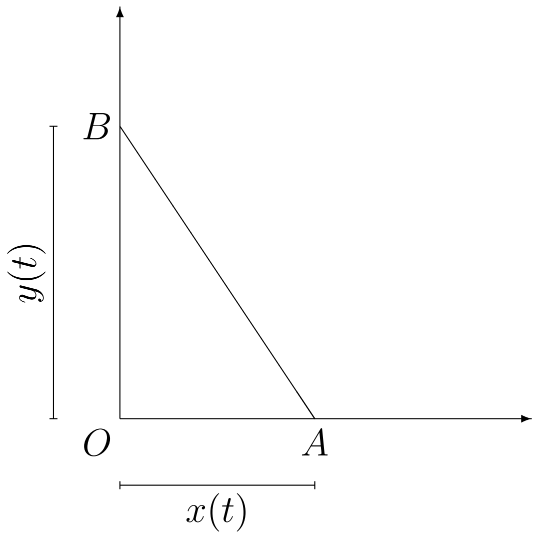
Risoluzione.

Unità di misura: m, sec.

Poniamo:

$x = x(t)$ misura di OA;

$y = y(t)$ misura di OB.



La relazione che lega x e y è il teorema di Pitagora. Scriviamola e deriviamo:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\star \qquad 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Nell'istante considerato abbiamo i seguenti valori:

$$x_0 = 3$$

$$y_0 = \sqrt{25 - x_0^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = -0.9$$

Sostituendo nell'ugualianza $\star$, ricaviamo:

$$6\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 - 8 \cdot 0.9 = 0 \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{10} = 1.2$$

Esercizio. *Usando un'opportuna sostituzione, calcolare:*

$$I = \int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x^2+2x}\,dx$$

Risoluzione. Si pone $\sqrt{x} = t$, cioè $x = t^2$ e perciò $dx = 2t \cdot dt$.

$$I = \int \frac{3t+1}{2t^4+2t^2} \cdot 2t\,dt = \int \frac{3t+1}{t^3+t}\,dt$$

Metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\begin{aligned}
\frac{3t+1}{t(t^2+1)} &= \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1} \\
3t+1 &= at^2 + a + bt^2 + ct \\
3t+1 &= (a+b)t^2 + ct + a
\end{aligned}$$

Uguagliamo i coefficienti dei termini con lo stesso grado:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=3 \\ a=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{-t+3}{t^2+1}\,dt = \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{3}{t^2+1}\,dt = \\
&= \log|t| - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + 3\,\mathrm{arctg}\,t \ + k = \\
&= \log\sqrt{x} - \frac{1}{2}\log(x+1) + 3\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} \ + k = \\
&= \frac{1}{2}[\log x - \log(x+1)] + 3\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} \ + k = \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{x}{x+1} + 3\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} \ + k
\end{aligned}$$

Esercizio. *Nel sistema (O, x, y, z) considerare i punti:*

$$A(-1,3,0), \qquad B(0,3,1), \qquad C(1,2,1), \qquad D(2,2,3).$$

$\boxed{\mathbf{a}}$ *Verificare che i punti A, B, C non sono allineati e trovare un'equazione del piano α che li contiene.*

Consideriamo i due vettori:

$$\begin{aligned} B - A &= (0,3,1) - (-1,3,0) &= (1,0,1) \\ C - A &= (1,2,1) - (-1,3,0) &= (2,-1,1) \end{aligned}$$

Essi non sono paralleli perché le loro coordinate non sono proporzionali (ad esempio, la seconda coordinata vale rispettivamente 0 e -1). Calcoliamone il prodotto vettoriale:

$$\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(0+1) - \boldsymbol{j}(1-2) + \boldsymbol{k}(-1-0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} = (1,1,-1)$$

Il piano α passa per A ed è perpendicolare a $\boldsymbol{v}$:

$$1 \cdot (x+1) + 1 \cdot (y-3) - 1 \cdot (z-0) = 0 \qquad \alpha \ \ldots \ x + y - z - 2 = 0$$

$\boxed{\mathbf{b}}$ *Dopo aver scritto equazioni parametriche della retta r passante per D e perpendicolare ad α, verificare che il punto $(-1,-1,6)$ appartiene ad r.*

La direzione di tale retta è quella di $\boldsymbol{v}$:

$$r \ \ldots \ \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Sostituendo $x = -1$, $y = -1$, $z = 6$, si ottiene lo stesso valore $t = -3$ da tutte e tre le equazioni: perciò il punto appartiene ad r.

$\boxed{\mathbf{c}}$ *Calcolare il volume del parallelepipedo avente per spigoli i segmenti AB, AC, AD.*

Si calcola il prodotto misto di $B - A$, $C - A$ e $D - A = (3,-1,3)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3+1) - 0 + 1(-2+3) = -2 - 0 + 1 = -1$$

Il volume richiesto è il modulo di tale numero, cioè 1.