Prova scritta del 17/9/2007

$\boxed{\mathbf{1}}$ È data la funzione:

$$f(x) = x^2\sqrt{x+1}$$

Determinarne:

a) dominio, limiti significativi, eventuali asintoti;

b) derivata prima, crescenza, punti di massimo e di minimo, attacchi;

c) derivata seconda, concavità, flessi;

d) grafico.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$ al grafico della funzione:

$$f(x) = x^2 + \sin x$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Un cubo metallico soggetto a riscaldamento si sta dilatando. Sapendo che in un certo istante il lato del cubo misura 20 centimetri e il volume sta aumentando con velocità di 6 centimetri cubi all'ora, determinare la velocità con cui varia il lato in quell'istante.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{x-3}{x^2(x+1)}\,dx$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Nel sistema cartesiano (O, x, y, z) considerare i punti $A(3,1,2)$ e $B(0,2,1)$ e il piano α di equazione $x + y + z + 3 = 0$.

a) Scrivere equazioni cartesiane della retta r passante per A e B.

b) Scrivere un'equazione del piano contenente r e perpendicolare ad α.

c) Trovare il punto H intersezione di α con la retta per A e perpendicolare ad α.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Funzione da studiare: $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$.

$\boxed{a}$ *Dominio:* $x + 1 \geq 0$ (esistenza della radice), cioè $x \geq -1$.
Limiti significativi.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x+1} = (+\infty)\cdot\sqrt{+\infty} = +\infty$$

$f(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 0$, altrimenti è $f(x) > 0$.

Studio degli asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x+1} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Perciò l'asintoto non esiste.

$\boxed{b}$ *Derivata prima.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{x+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{4x(x+1)+x^2}{2\sqrt{x+1}} = \\ &= \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Crescenza. La condizione $f'(x) > 0$ equivale a $5x^2 + 4x > 0$ (ristretta al dominio), verificata per $-1 < x < -\frac{4}{5}$ oppure $x > 0$. Perciò:

$x = -\frac{4}{5}$ è punto di massimo relativo;
$x = 0$ è punto di minimo relativo (e assoluto).

Attacco in -1^+.

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}} \to \frac{5\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1)}{2\cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Il grafico ha tangente verticale nel punto di ascissa -1.

$\boxed{c}$ *Derivata seconda.*

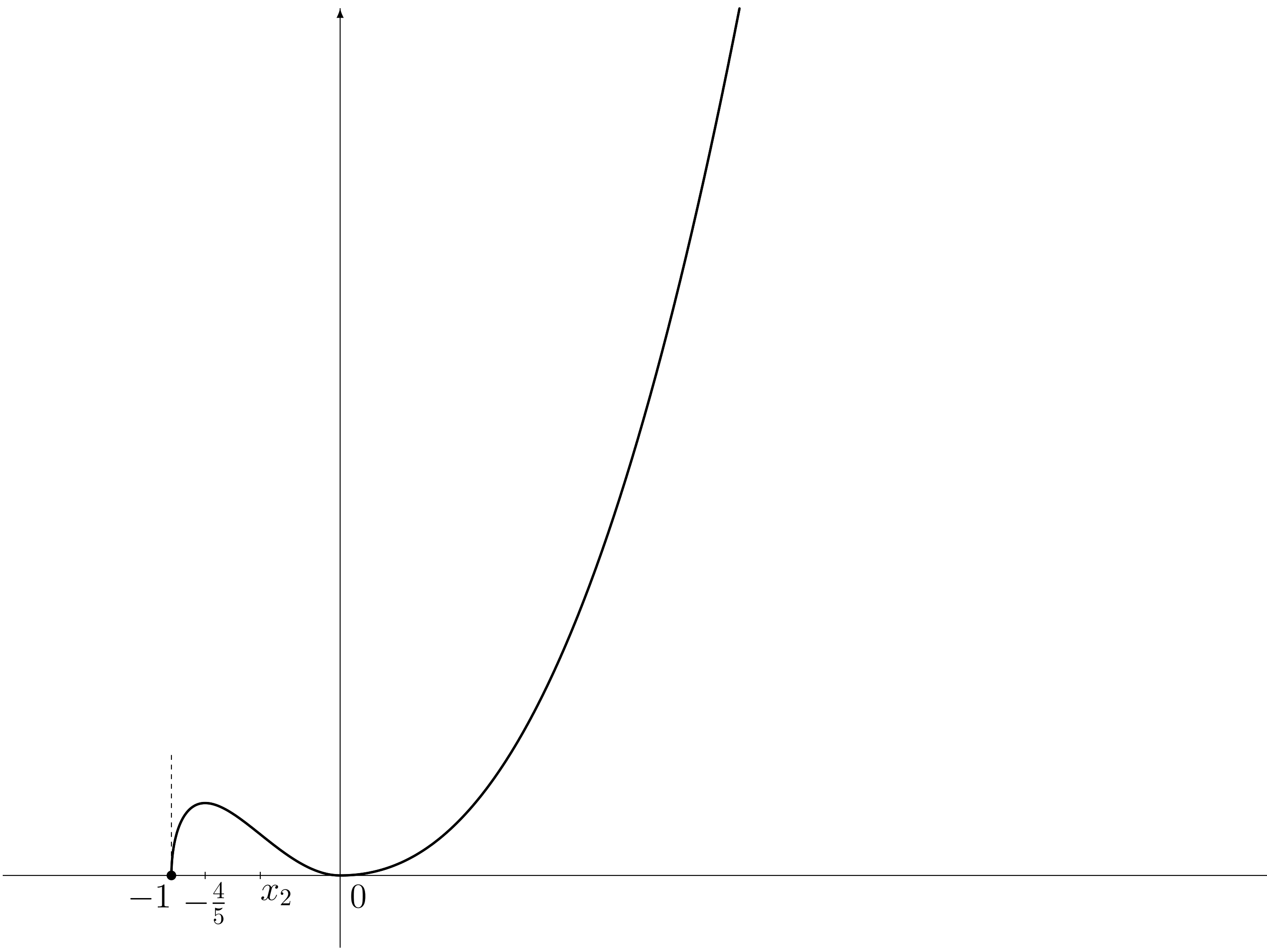
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(10x+4)\sqrt{x+1} - \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{(x+1)^2}} = \frac{\frac{2(10x+4)(x+1)-(5x^2+4x)}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{(x+1)^2}} = \\ &= \frac{2(10x^2+14x+4) - 5x^2 - 4x}{4\sqrt{(x+1)^3}} = \\ &= \frac{15x^2+24x+8}{4\sqrt{(x+1)^3}} \end{aligned}$$

Concavità. Studiamo la condizione $f''(x) > 0$, cioè $15x^2 + 24x + 8 > 0$.
Le radici sono $x_1 = \frac{-12-\sqrt{24}}{15} \approx -1.127$ e $x_2 = \frac{-12+\sqrt{24}}{15} \approx -0.473$.
I valori $x < x_1$ si scartano perché non appartengono al dominio. Perciò $f(x)$ è:

concava per $-1 < x < x_2$,
convessa per $x > x_2$.

Il punto x_2 è di flesso.

$\boxed{d}$ *Grafico.*



$\boxed{\mathbf{2}}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \sin x \\ f'(x) &= 2x + \cos x \end{aligned}$$

Valori in $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{2}) &= \frac{\pi^2}{4} + 1 \\ f'(\frac{\pi}{2}) &= \pi + 0 = \pi \end{aligned}$$

Equazione della retta tangente:

$$\begin{aligned} y &= f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{2}) \\ y &= \frac{\pi^2}{4} + 1 + \pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ y &= \pi x + 1 - \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Unità di misura*: cm, h.
Siano x il lato del cubo e y il suo volume.
Sussiste la relazione:

$$y = x^3$$

Derivando termine a termine (x e y sono funzioni di t):

$$\frac{dy}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

Essendo $x_0 = 20$ e $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 6$, si ha quindi:

$$\begin{aligned} 6 &= 3 \cdot 20^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 &= \frac{6}{1200} = \frac{1}{200} = 0.005 \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito:

$$I = \int \frac{x-3}{x^2(x+1)}\,dx$$

Cerchiamo a, b, c in modo che (metodo dei coefficienti indeterminati):

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x^2(x+1)} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} \\
x-3 &= ax(x+1) + b(x+1) + cx^2 \\
x-3 &= ax^2 + ax + bx + b + cx^2 \\
x-3 &= (a+c)x^2 + (a+b)x + b
\end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso grado, si ottiene un sistema di tre equazioni nelle incognite a, b, c:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=1 \\ b=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-3 \\ a=1-b=4 \\ c=-a=-4 \end{cases}$$

Perciò l'integrale indefinito è:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{4}{x}\,dx - \int \frac{3}{x^2}\,dx - \int \frac{4}{x+1}\,dx = \\
&= 4\log|x| + \frac{3}{x} - 4\log|x+1| + k
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x-3}{x^2(x+1)}\,dx &= \left[4\log|x| + \frac{3}{x} - 4\log|x+1|\right]_1^2 = \\
&= 4\log 2 + \frac{3}{2} - 4\log 3 - (0 + 3 - 4\log 2) = \\
&= 8\log 2 - 4\log 3 - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Osservazione. Notare il segno negativo del risultato: un valore approssimato è -0.3493.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Dati del problema:

Punti $A(3,1,2)$ e $B(0,2,1)$, piano α di equazione $x+y+z+3=0$

$\boxed{a}$ Un vettore direzione della retta r per A e B è:

$$\boldsymbol{v} = A - B = (3,1,2) - (0,2,1) = (3,-1,1)$$

Scriviamo equazioni parametriche di r e poi, eliminando il parametro t, ricaviamone equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y = 6 \\ y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{b}$ Fascio di asse r:

$$\begin{aligned} \lambda(x+3y-6) + \mu(y+z-3) &= 0 \\ \lambda x + (3\lambda+\mu)y + \mu z - 6\lambda - 3\mu &= 0 \end{aligned}$$

Condizione di perpendicolarità (fra i vettori normali al piano del fascio e al piano dato α):

$$(\lambda, 3\lambda+\mu, \mu) \bullet (1,1,1) = 0, \qquad \lambda + 3\lambda + \mu + \mu = 0, \qquad 4\lambda + 2\mu = 0$$

Dovendo essere $\mu = -2\lambda$, poniamo $\lambda = 1$, $\mu = -2$ e abbiamo il piano richiesto:

$$x + y - 2z = 0$$

$\boxed{c}$ Intersezione fra la retta indicata e il piano α:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cdots \\ (3+t) + (1+t) + (2+t) + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cdots \\ 3t + 9 = 0 \end{cases}$$

Si ha dunque $t = -3$ e per tale valore del parametro si ottiene il punto richiesto:

$$\begin{cases} x = 3 - 3 \\ y = 1 - 3 \\ z = 2 - 3 \end{cases} \qquad H(0,-2,-1)$$