Prova scritta del 18/12/2007

$\boxed{\mathbf{1}}$ È data la funzione:

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\log|x| \quad \text{(tema A)}$$
$$f(x) = x^2 - 2x - 4\log|x| \quad \text{(tema B)}$$

Determinarne:

a) dominio, limiti significativi, asintoti;

b) derivata prima, crescenza, punti di massimo e di minimo;

c) derivata seconda, concavità, flessi;

d) grafico.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$ al grafico della funzione:

$$f(x) = \sin x - e^{\cos x}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ L'automobile da corsa F sta percorrendo una pista rettilinea. Il telemetro T, che è posto a lato della pista a 18 metri da essa, rileva in un certo istante che la distanza TF è di 30 metri e che tale distanza sta aumentando con velocità di 64 metri al secondo. Qual è la velocità dell'automobile in quell'istante?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Calcolare l'area della regione del piano compresa fra i grafici delle funzioni

$$f(x) = 1 + x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x, \quad \text{per } 1 \leq x \leq 2.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Nel sistema cartesiano (O, x, y, z) considerare i punti:

$$P(-2, 0, 4), \quad Q(-1, -1, 3), \quad S(3, 1, 2)$$

a) Dopo aver scritto equazioni parametriche della retta r passante per P e Q, verificare se è vero o no che il punto $(1, -3, 2)$ appartiene a r.

b) Determinare il piano contenente la retta r e il punto S.

c) Calcolare l'area del triangolo PQS.

$\boxed{\textbf{1, tema A}}$ *Funzione da studiare:* $f(x) = x^2 - 6x + 4\log|x|$.

$\boxed{a}$, $\boxed{b}$. *Dominio:* $|x| > 0$, cioè $x \neq 0$.
Limiti significativi.

$$\lim_{x\to 0^\pm} (x^2 - 6x + 4\log|x|) = 0 - 0 + (-\infty) = -\infty$$

Perciò la retta $x = 0$ è asintoto verticale destro e sinistro.
Il prossimo limite presenta un'indeterminazione che si può risolvere così:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x} + 4\frac{\log|x|}{x^2}\right) = (+\infty)\cdot(1 - 0 + 0) = +\infty$$

Infatti la seconda frazione entro parentesi ha limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log|x|}{x^2} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Derivata prima. Ricordando ancora che $D\,\log|x| = \frac{1}{x}$ si ha:

$$f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$$

Il prossimo limite implica che non c'è asintoto obliquo né a $+\infty$ né a $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2x - 6 + \frac{4}{x}\right) = \pm\infty$$

Crescenza. $f'(x) > 0$ per $\frac{x^2-3x+2}{x} > 0$:

		0		1		2	
$x^2 - 3x + 2 > 0$	$+$		$+$	○	$-$	○	$+$
$x > 0$	$-$	○	$+$		$+$		$+$
$f'(x) > 0$	$-$	○	$+$	○	$-$	○	$+$

$f(x)$ è decrescente per $x < 0$, crescente per $0 < x < 1$, decrescente per $1 < x < 2$, crescente per $x > 2$.
I punti $x = 1$ e $x = 2$ sono rispettivamente di massimo e di minimo relativo.
Si ha $f(1) = -5$.

$\boxed{c}$ *Derivata seconda.*

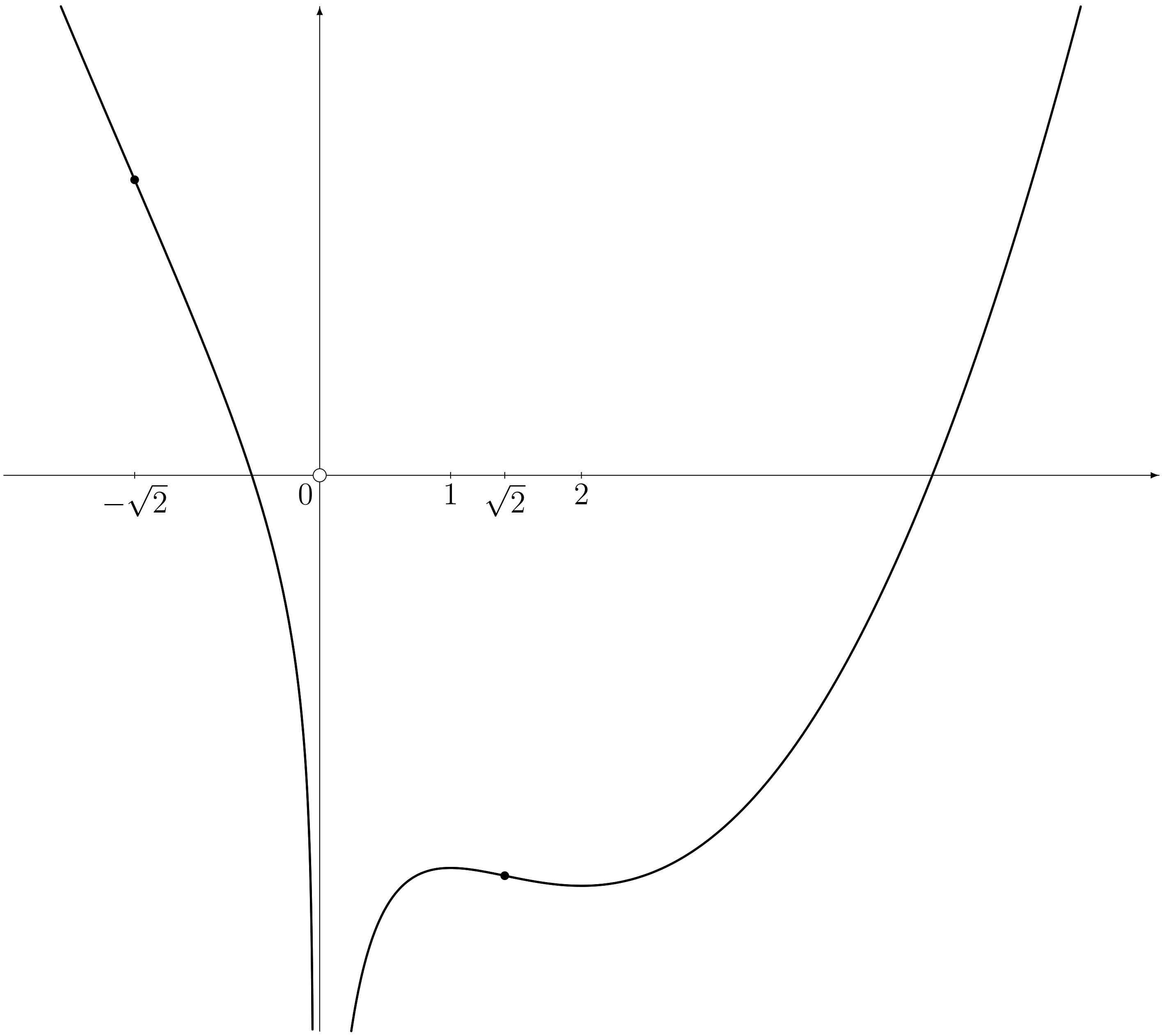
$$f''(x) = D\left(2x - 6 + \frac{4}{x}\right) = 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$$

La condizione $f''(x) > 0$ è verificata per $x^2 - 2 > 0$, cioè per $x < -\sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$.

La funzione è convessa negli intervalli $]-\infty, -\sqrt{2}[$ e $]\sqrt{2}, +\infty[$, concava negli intervalli $]-\sqrt{2}, 0[$ e $]0, \sqrt{2}[$.

I punti $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$ sono di flesso.

$\boxed{d}$ *Grafico.*



$\boxed{\textbf{1, tema B}}$ *Funzione da studiare:* $f(x) = x^2 - 2x - 4\log|x|$.

$\boxed{a}$, $\boxed{b}$. *Dominio:* $|x| > 0$, cioè $x \neq 0$.
Limiti significativi.

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} (x^2 - 2x - 4\log|x|) = 0 - 0 - (-\infty) = +\infty$$

Perciò la retta $x = 0$ è asintoto verticale destro e sinistro.
Il prossimo limite è in forma indeterminata $+\infty \pm \infty - \infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - 4\frac{\log|x|}{x^2}\right) = (+\infty)\cdot(1 - 0 - 0) = +\infty$$

Infatti la seconda frazione entro parentesi ha limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log|x|}{x^2} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Derivata prima. Ricordando ancora che $D\,\log|x| = \frac{1}{x}$ si ha:

$$f'(x) = 2x - 2 - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x}$$

Il prossimo limite implica che non c'è asintoto obliquo né a $+\infty$ né a $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2x - 2 - \frac{4}{x}\right) = \pm\infty$$

Crescenza. $f'(x) > 0$ per $\frac{x^2-x-2}{x} > 0$:

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<2$	$x>2$
$x^2 - x - 2 > 0$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x > 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x) > 0$	$-$	$+$	$-$	$+$

-1 $\quad 0 \quad$ 2

$f(x)$ è decrescente per $x < -1$, crescente per $-1 < x < 0$, decrescente per $0 < x < 2$, crescente per $x > 2$.
I punti $x = -1$ e $x = 2$ sono entrambi di minimo relativo.

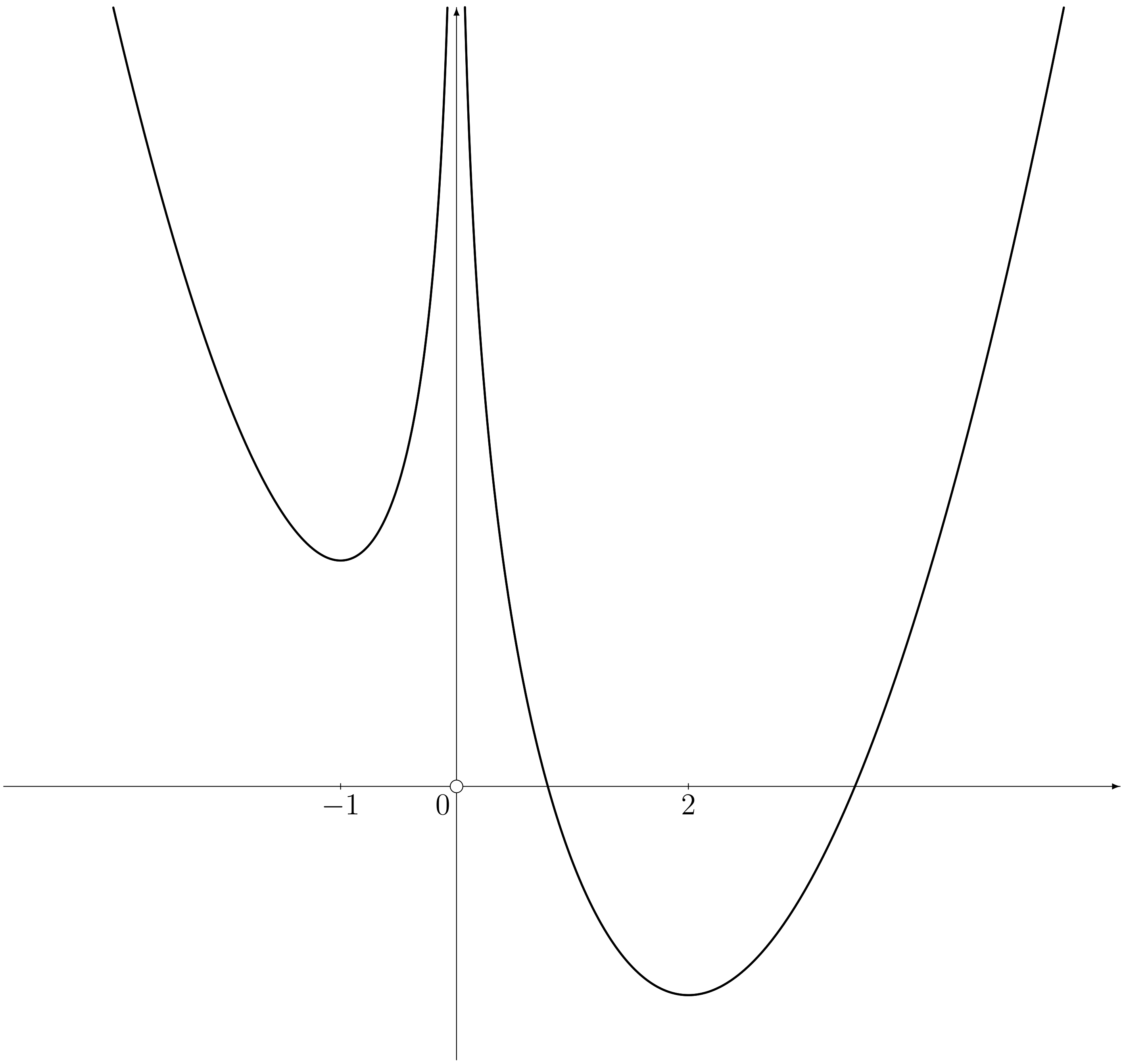
Si ha $f(-1) = 3$, $f(2) = -4\log 2$ ($x = 2$ è punto di minimo assoluto).

$\boxed{c}$ *Derivata seconda.*

$$f''(x) = D\left(2x - 2 - \frac{4}{x}\right) = 2 + \frac{4}{x^2}$$

Essendo $f''(x) > 0$ per ogni x, la funzione è convessa (sia in $]-\infty, 0[$ sia in $]0, +\infty[$) e non ci sono flessi.

$\boxed{d}$ *Grafico.*



$\boxed{\mathbf{2}}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x - e^{\cos x} \\
f'(x) &= \cos x + e^{\cos x} \sin x
\end{aligned}
$$

Valori in $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$
\begin{aligned}
f(\frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
f'(\frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

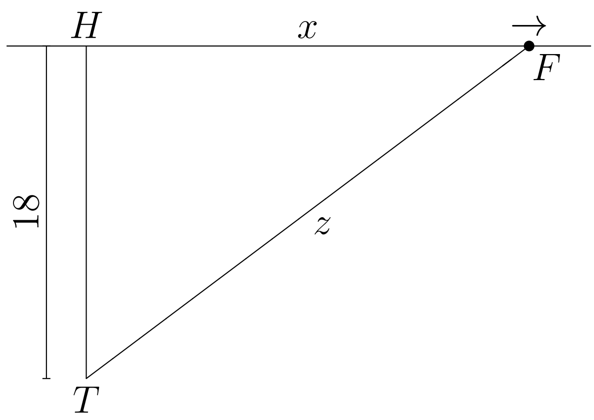
Equazione della retta tangente:

$$
\begin{aligned}
y &= f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4}) \cdot (x - \frac{\pi}{4}) \\
y &= \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

⋆ ⋆ ⋆

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Unità di misura*: m, sec.

Indichiamo rispettivamente con $z = z(t)$ e $x = x(t)$ le misure di TF e HF. Per il teorema di Pitagora, in ogni istante vale la relazione:



$$x^2 + 18^2 = z^2$$

Deriviamo termine a termine:

$$2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

Essendo per ipotesi $z_0 = 30$, dalla prima relazione si ricava:

$$x_0 = \sqrt{z_0^2 - 18^2} = \sqrt{900 - 324} = 24$$

D'altronde sappiamo che $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 64$ e perciò dalla seconda relazione ricaviamo:

$$24\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 30 \cdot 64, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{30 \cdot 64}{24} = 80$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Secondo la formula dell'area $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$, dobbiamo calcolare:

$$I = \int_1^2 \left(1 + x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x\right)\,dx$$

Calcoliamo dapprima (per parti con fattore differenziale $\frac{1}{2\sqrt{x}}$):

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x\,dx &= \sqrt{x}\log x - \int \frac{1}{x}\sqrt{x}\,dx = \\
&= \ldots - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \\
&= \sqrt{x}\log x - 2\sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

Perciò l'integrale indefinito è:

$$\int \left(1 + x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x\right)\,dx = x + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{x}\log x + 2\sqrt{x} + c$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
I &= \left[x + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{x}\log x + 2\sqrt{x}\right]_1^2 = \\
&= 2 + 2 - \sqrt{2}\log 2 + 2\sqrt{2} - \left(1 + \frac{1}{2} - 0 + 2\right) = \\
&= \frac{1}{2} - \sqrt{2}\log 2 + 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Osservazione. Un valore approssimato di tale area è 2.3482.

$\boxed{\textbf{5}}$ Dati del problema:

$$P(-2,0,4), \qquad Q(-1,-1,3), \qquad S(3,1,2)$$

$\boxed{a}$ La retta r passa per P e ha direzione $Q-P=(1,-1,-1)$, quindi ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=4-t \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate del punto dato $(1,-3,2)$ risulta:

$$\begin{cases} 1=-2+t \\ -3=-t \\ 2=4-t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=3 \\ t=3 \\ t=2 \end{cases}$$

Dunque il punto non appartiene a r (le coordinate non corrispondono a uno stesso valore del parametro t).

$\boxed{b}$ Ricaviamo equazioni cartesiane di r (eliminando t dalle equazioni parametriche):

$$\begin{cases} x=-2-y \\ z=4+y \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-z+4=0 \end{cases}$$

Consideriamo il fascio di asse r e sostituiamo le coordinate di S:

$$\lambda(x+y+2)+\mu(y-z+4)=0, \qquad \lambda(3+1+2)+\mu(1-2+4)=0, \qquad \mu=-2\lambda$$

Ponendo $\lambda=1$ e $\mu=-2$ abbiamo il piano richiesto:

$$x+y+2-2(y-z+4)=0, \qquad x-y+2z-6=0$$

$\boxed{c}$ Determiniamo il vettore $(Q-P)\times(S-P)=(1,-1,-1)\times(5,1,-2)$:

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}(2+1)-\boldsymbol{j}(-2+5)+\boldsymbol{k}(1+5)=(3,-3,6)$$

L'area del triangolo PQS è:

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-3)^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{54}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$$