Prova scritta del 18/12/2008, tema A

$\boxed{1}$ È Data la funzione:

$$f(x) = e^x(x^2 - 3x + 3)$$

Determinarne:

a) dominio, limiti significativi, asintoti;
b) derivata prima, crescenza, punti di massimo e di minimo;
c) derivata seconda, concavità, flessi;
d) grafico.

$\boxed{2}$ Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa e al grafico della funzione:

$$f(x) = x^2 + \log^2 x$$

$\boxed{3}$ Un blocco di metallo si sta dilatando mantenendo la forma di parallelepipedo a base quadrata con l'altezza tripla del lato di base. Sapendo che in un certo istante il volume è di 225 centimetri cubi e sta aumentando alla velocità di 0.25 centimetri cubi all'ora, determinare la velocità con cui varia il lato di base in quell'istante.

$\boxed{4}$ Calcolare l'area della regione del piano compresa fra i grafici delle funzioni

$$f(x) = 2 + x\sin x \qquad \text{e} \qquad g(x) = -x^2, \quad \text{per } 0 \leq x \leq \pi.$$

$\boxed{5}$ Nel sistema cartesiano (O, x, y, z) considerare i punti $A(2, 1, 2)$, $B(1, 0, 3)$ e la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

a) Trovare il piano passante per r e B.

b) Scrivere equazioni parametriche della retta passante per A e perpendicolare ai vettori $A - O$ e $B - O$.

c) Calcolare la distanza di A da r.

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Funzione da studiare:* $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 3)$.

$\boxed{a}$. *Dominio:* $\mathbb{R}$ (l'intero asse reale).
Limiti significativi. Il limite per $x \to -\infty$ è in forma indeterminata $0 \cdot (+\infty)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{e^{-x}} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 3}{-e^{-x}} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Perciò la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Il prossimo limite mostra che non c'è asintoto obliquo a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$\boxed{b}$ *Derivata prima:*

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 3) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x)$$

La condizione $f'(x) > 0$ equivale a $x^2 - x > 0$, verificata per $x < 0$ oppure $x > 1$. Pertanto:

> $f(x)$ è crescente per $x \le 0$, decrescente per $0 \le x \le 1$, crescente per $x \ge 1$;
> $x = 0$ è punto di massimo relativo, con $f(0) = e^0 \cdot 3 = 3$;
> $x = 1$ è punto di minimo relativo, con $f(1) = e^1 \cdot 1 = e$.

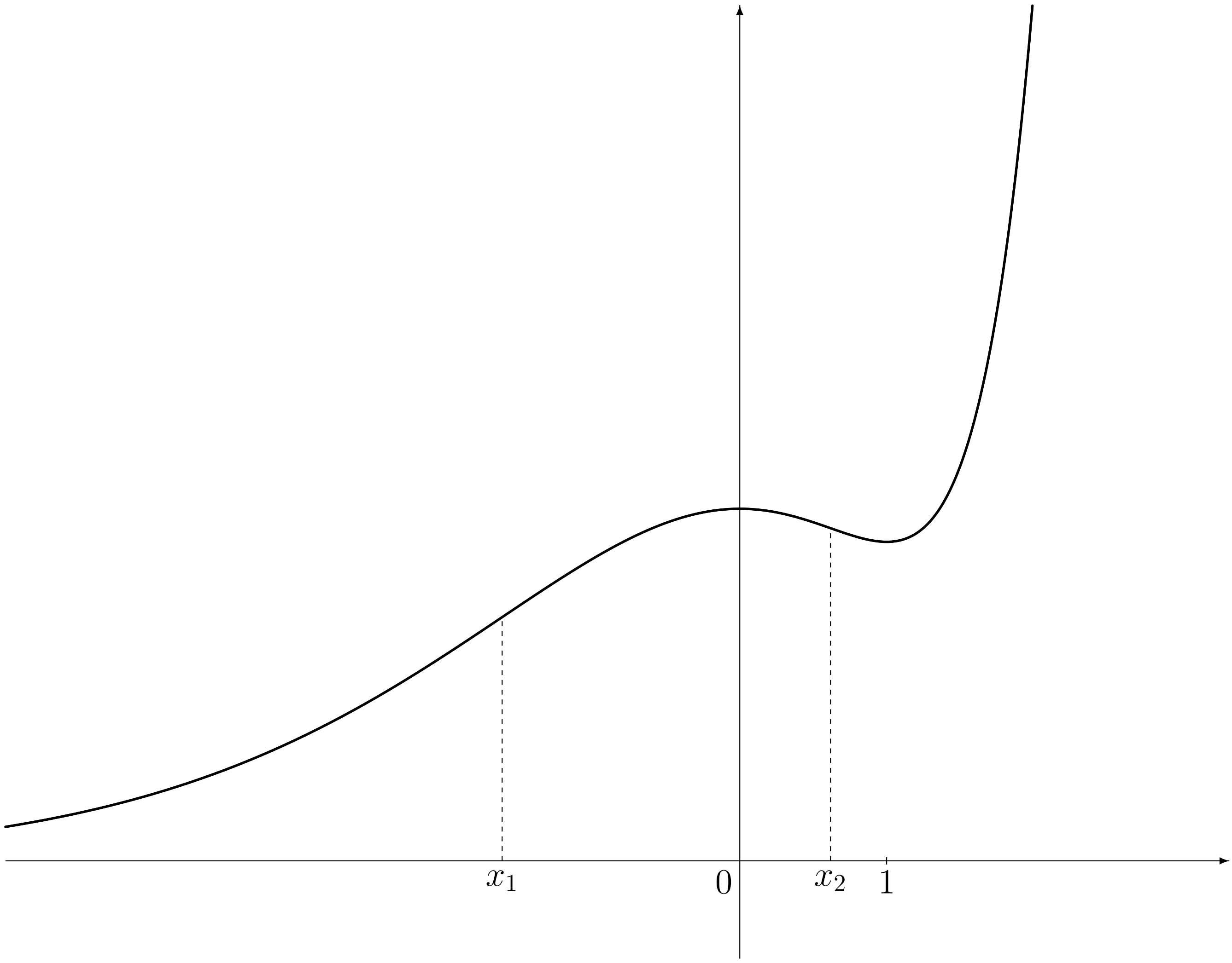
$\boxed{c}$ *Derivata seconda.*

$$f''(x) = e^x(x^2 - x) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x - 1)$$

La condizione $f''(x) > 0$ equivale a $x^2 + x - 1 > 0$.
Indicando $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, si ha che:

> $f(x)$ è convessa per $x < x_1$, concava per $x_1 < x < x_2$, convessa per $x > x_2$;
> i punti x_1 e x_2 sono di flesso.

$\boxed{d}$ *Grafico di* $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 3)$.



$\boxed{\mathbf{2}}$

$$f(x) = x^2 + \log^2 x \qquad\qquad f'(x) = 2x + 2\log x \cdot \frac{1}{x}$$

Valori in $x_0 = e$:

$$f(e) = e^2 + 1 \qquad\qquad f'(e) = 2e + \frac{2}{e}$$

Equazione della retta tangente:

$$\begin{aligned} y &= f(e) + f'(e) \cdot (x - e) \\ y &= e^2 + 1 + \left(2e + \frac{2}{e}\right)(x - e) \\ y &= \left(2e + \frac{2}{e}\right) x - e^2 - 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Unità di misura*: cm, h.
Siano $x = x(t)$ il lato di base e $y = y(t)$ il volume del parallelepipedo.
Dato che l'altezza è $3x$, si ha $y = x^2 \cdot 3x$. Abbiamo quindi la seguente identità, che deriviamo termine a termine:

$$\begin{aligned} y &= 3x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= 9x^2 \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Essendo per ipotesi $y_0 = 225$, dalla prima identità ricaviamo:

$$225 = 3x_0^3 \qquad\qquad x_0 = \sqrt[3]{75}$$

Dunque, essendo $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0.25$, risulta:

$$\begin{aligned} 0.25 &= 9\sqrt[3]{75^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 &= \frac{0.25}{9\sqrt[3]{75^2}} = \frac{1}{180\sqrt[3]{45}} \approx 0.001561912 \end{aligned}$$

$\star \quad \star \quad \star$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Secondo la formula dell'area $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$, dobbiamo calcolare:

$$I = \int_0^\pi [2 + x\sin x - (-x^2)]\, dx$$

Calcoliamo dapprima (per parti con fattore differenziale $\sin x$):

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \int 1 \cdot \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c$$

Perciò l'integrale indefinito è:

$$\int (2 + x\sin x + x^2)\, dx = 2x - x\cos x + \sin x + \frac{1}{3}x^3 + c$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} I &= [2x - x\cos x + \sin x + \frac{1}{3}x^3]_0^\pi = \\ &= (2\pi - \pi\cdot(-1) + 0 + \frac{1}{3}\pi^3) - (0 - 0 + 0 + 0) = \\ &= 3\pi + \frac{1}{3}\pi^3 \approx 19.7602 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Dati: $A(2,1,2)$, $\quad B(1,0,3)$, $\quad r\ \ldots \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = 2t \end{cases}$

$\boxed{a}$ Ricaviamo equazioni cartesiane di r eliminando il parametro t:

$$\begin{cases} t = 2-x \\ y = 1+2(2-x) \\ z = 2(2-x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-5=0 \\ 2x+z-4=0 \end{cases}$$

Consideriamo il fascio di asse r e sostituiamo le coordinate di B:

$\lambda(2x+y-5)+\mu(2x+z-4)=0, \qquad \lambda(2+0-5)+\mu(2+3-4)=0, \qquad \mu=3\lambda$

Ponendo $\lambda=1$ e $\mu=3$ abbiamo il piano richiesto:

$$2x+y-5+3(2x+z-4)=0, \qquad 8x+y+3z-17=0$$

$\boxed{b}$ La direzione della retta richiesta è quella del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= (A-O)\times(B-O) = (2,1,2)\times(1,0,3) = \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(3-0)-\boldsymbol{j}(6-2)+\boldsymbol{k}(0-1) = (3,-4,-1) \end{aligned}$$

Equazioni parametriche della retta (equazione vettoriale $P = A + t\boldsymbol{v}$):

$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-4t \\ z = 2-t \end{cases}$$

$\boxed{c}$ Al variare di t, i punti di r sono $R(2-t, 1+2t, 2t)$.
Imponiamo la condizione di perpendicolarità fra $R-A=(-t,2t,2t-2)$ e $\boldsymbol{r}=(-1,2,2)$, vettore direzione di r:

$$(-t,2t,2t-2)\bullet(-1,2,2)=0, \qquad t+4t+4t-4=0, \qquad t=\frac{4}{9}$$

La distanza richiesta è il modulo del vettore R_0-A, dove R_0 è il punto della retta r corrispondente al valore di t trovato (punto di minima distanza):

$$\begin{aligned} |R_0-A| &= \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(2\frac{4}{9}\right)^2+\left(2\frac{4}{9}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{81}+\frac{64}{81}+\frac{100}{81}} = \\ &= \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$