Prova scritta del 29/8/2011

$\boxed{1}$ È Data la funzione:

$$f(x) = x + \log(x^2 - 3)$$

Determinarne:

a) dominio, limiti significativi, asintoti;
b) derivata prima, crescenza, punti di massimo e di minimo;
c) derivata seconda, concavità, flessi;
d) grafico.

$\boxed{2}$ Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 2 al grafico della funzione:

$$f(x) = x - \frac{e^x}{x}$$

$\boxed{3}$ Una ditta produce contenitori a forma di parallelepipedo con base quadrata e capacità di 12 litri. Il materiale usato per il fondo e il coperchio costa 6 centesimi al decimetro quadrato ed è diverso da quello usato per le pareti laterali che costa 3 centesimi al decimetro quadrato. Trovare le dimensioni del contenitore per le quali il costo risulta minimo.

$\boxed{4}$ Usando il metodo dei coefficienti indeterminati, calcolare l'area del sottografico di

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x^2+1)} \quad \text{per} \quad 1 \le x \le 2.$$

$\boxed{5}$ Nel sistema cartesiano (O, x, y, z) considerare i due punti $A(1, 2, 1)$ e $B(2, 1, -1)$ e la retta r di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - 2y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Determinare il piano passante per r e A.

b) Determinare equazioni parametriche della retta parallela a r e passante per B.

c) Calcolare l'area del triangolo ABO.

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Funzione da studiare:* $f(x) = x + \log(x^2 - 3)$.

$\boxed{a}$. *Dominio:*
$x^2 - 3 > 0$, cioè $x < -\sqrt{3}$ oppure $x > \sqrt{3}$.

Limiti significativi.

$$\lim_{x\to -\sqrt{3}^-} f(x) = -\sqrt{3} + (-\infty) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \sqrt{3}^+} f(x) = \sqrt{3} + (-\infty) = -\infty$$

Il limite per $x \to -\infty$ è in forma indeterminata $-\infty + \log(+\infty) = -\infty + \infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x \left(1 + \frac{\log(x^2-3)}{x}\right)$$

Da ciò, essendo

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\log(x^2-3)}{x} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-3}}{1} = 0 \tag{1}$$

si ottiene:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = (-\infty)\cdot(1+0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (+\infty) + \log(+\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

Ricerca degli asintoti.
Le rette $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ sono asintoti verticali.

Per gli asintoti obliqui, usando L'Hôpital come in (1), si ha:

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{\log(x^2-3)}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

Ciò malgrado non c'è asintoto obliquo né a $-\infty$ né a $+\infty$ perché:

$$\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to \pm\infty} \log(x^2-3) = \log(+\infty) = +\infty$$

$\boxed{b}$ *Derivata prima:*

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-3} = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3}$$

Crescenza: $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3} > 0$ equivale a $x^2 + 2x - 3 > 0$ (nel dominio il denominatore è positivo), verificata per $x < -3$ oppure $x > 1$, vale a dire $x > \sqrt{3}$. Pertanto:

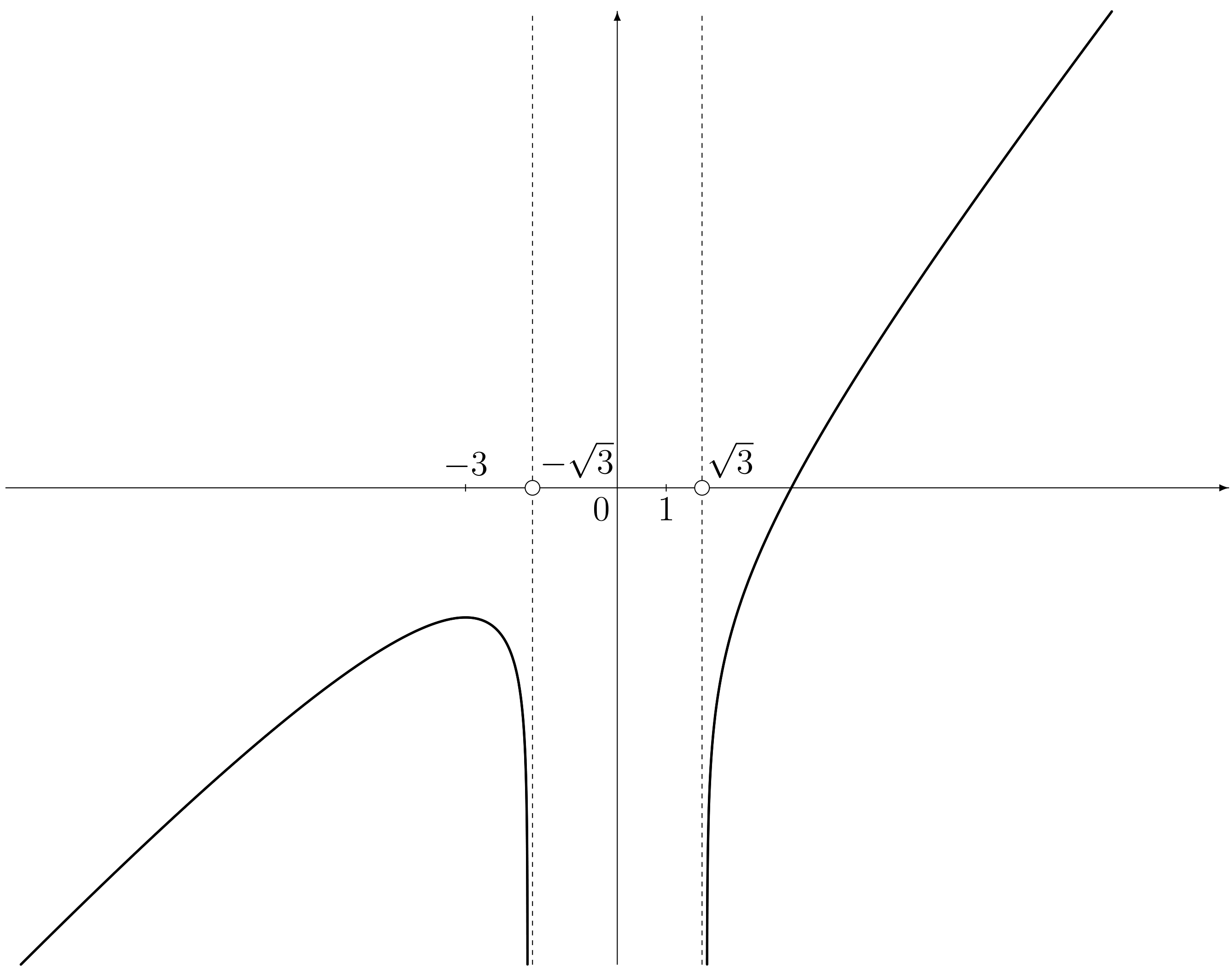
> $f(x)$ è crescente per $x \leq -3$, decrescente per $-3 \leq x < -\sqrt{3}$, crescente per $x > \sqrt{3}$;
> $x = -3$ è punto di massimo relativo, con $f(-3) = -3 + \log 6 < 0$.

$\boxed{c}$ *Derivata seconda.* Da $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-3}$ risulta:

$$f''(x) = 0 + \frac{2(x^2-3) - 2x \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x^2 - 6 - 4x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{-2x^2-6}{(x^2-3)^2}$$

Essendo $f''(x) < 0$ per ogni x, la funzione è concava in entrambi gli intervalli $x < -\sqrt{3}$ e $x > \sqrt{3}$. La funzione non ha flessi.

$\boxed{d}$ *Grafico di $f(x) = x + \log(x^2 - 3)$.*



$\boxed{\mathbf{2}}$

$$f(x) = x - \frac{e^x}{x} \qquad f'(x) = 1 - \frac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2} = 1 - \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Valori in $x_0 = 2$:

$$f(2) = 2 - \frac{e^2}{2} \qquad f'(2) = 1 - \frac{e^2(2-1)}{4} = 1 - \frac{e^2}{4}$$

Equazione della retta tangente:

$$\begin{aligned} y &= f(2) + f'(2) \cdot (x-2) \\ y &= 2 - \frac{e^2}{2} + \left(1 - \frac{e^2}{4}\right)(x-2) \end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Unità di misura*: dm, Euro cent.

Detta x la misura del lato di base, abbiamo:

altezza della scatola: $h(x) = \frac{12}{x^2}$
superficie laterale: $s_1(x) = 4x \cdot h(x) = \frac{48}{x}$
fondo e coperchio: $s_2(x) = 2x^2$.

Il costo complessivo della scatola è dato da:

$$\begin{aligned} y(x) &= 6 \cdot s_2(x) + 3 \cdot s_1(x) = \\ &= 6 \cdot 2x^2 + 3\frac{48}{x} = \\ &= 12x^2 + \frac{144}{x} \end{aligned}$$

Si studia l'andamento di $y(x)$ per $x > 0$:

$$y'(x) = 24x - \frac{144}{x^2} = \frac{24x^3 - 144}{x^2}$$

La condizione $y'(x) > 0$ vale per $24x^3 - 144 > 0$, cioè per $x^3 > \frac{144}{24} = 6$, che equivale a $x > \sqrt[3]{6}$.

Il costo minimo si verifica quando il lato di base misura $x = \sqrt[3]{6}$.

La corrispondente altezza misura: $h(\sqrt[3]{6}) = \frac{12}{\sqrt[3]{36}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ L'area richiesta vale:

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x(x^2+1)}\,dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito: $I = \displaystyle\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x(x^2+1)} &= \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \\
x-1 &= a(x^2+1) + (bx+c)x \\
x-1 &= ax^2 + a + bx^2 + cx \\
x-1 &= (a+b)x^2 + cx + a
\end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei termini con lo stesso grado si ha il sistema:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=1 \\ a=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=-a=1 \\ c=1 \end{cases}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{-1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,dx = \\
&= \int \frac{-1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \\
&= -\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + k
\end{aligned}$$

In conclusione, l'area cercata vale:

$$\left[-\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right]_1^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= -\log 2 + \frac{1}{2}\log 5 + \operatorname{arctg} 2 - \left(-\log 1 + \frac{1}{2}\log 2 + \operatorname{arctg} 1\right) = \\
&= -\log 2 + \frac{1}{2}\log 5 + \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4} = \\
&= \frac{1}{2}\log 5 - \frac{3}{2}\log 2 + \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(Un valore approssimato è 0.08675.)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Dati: $A(1,2,1)$, $\quad B(2,1,-1)$, $\quad r \ \ldots \ \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-2y-4z+5=0 \end{cases}$

$\boxed{a}$ Consideriamo il fascio di asse r e sostituiamo le coordinate di A:

$$\begin{aligned} \lambda(x+y-z-1)+\mu(x-2y-4z+5) &= 0 \\ \lambda(1+2-1-1)+\mu(1-4-4+5) &= 0 \\ \lambda - 2\mu &= 0 \end{aligned}$$

Quindi $\lambda = 2\mu$ e ponendo $\lambda = 2$, $\mu = 1$ abbiamo il piano richiesto:

$$2(x+y-z-1)+(x-2y-4z+5)=0$$

L'equazione è $3x-6z+3=0$, che si può anche scrivere $x-2z+1=0$.

$\boxed{b}$ La direzione della retta richiesta è quella del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= (1,1,-1)\times(1,-2,-4) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= \boldsymbol{i}(-4-2)-\boldsymbol{j}(-4+1)+\boldsymbol{k}(-2-1)=(-6,3,-3) \end{aligned}$$

Equazioni parametriche della retta (equazione vettoriale $P = B + t\boldsymbol{v}$):

$$\begin{cases} x = 2-6t \\ y = 1+3t \\ z = -1-3t \end{cases} \qquad \text{o anche} \qquad \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$$

$\boxed{c}$ Determiniamo il vettore $\boldsymbol{w} = (A-O)\times(B-O)$:

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(-2-1)-\boldsymbol{j}(-1-2)+\boldsymbol{k}(1-4)=(-3,3,-3)$$

L'area richiesta è la metà del modulo di $\boldsymbol{w}$, vale a dire:

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{w}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$