Esercizio. *Si vuole costruire una cassa in legno truciolare munita di coperchio metallico e avente la forma di parallelepipedo rettangolo. Il volume della cassa deve essere di* 60 *decimetri cubi mentre le dimensioni della base stanno fra loro nel rapporto di* 4 *a* 5*. Sapendo che i prezzi del pannello truciolare e della lamiera metallica sono rispettivamente di* 0.10 *e di* 0.035 *euro al decimetro quadrato, determinare le dimensioni per le quali il costo di produzione è minimo. A quanto ammonta il costo di una cassa?*

Risoluzione. Unità di misura: decimetro, euro.
Dimensioni del rettangolo di base: $4x$ e $5x$.
Altezza: $h(x) = \frac{60}{4x \cdot 5x} = \frac{60}{20x^2} = \frac{3}{x^2}$.
Superficie da realizzare in legno (fondo e superficie laterale):

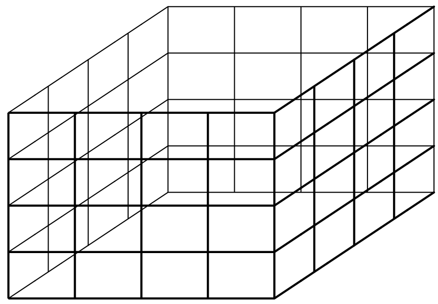
$$\begin{aligned} s_1(x) &= 20x^2 + 18x \cdot h(x) = 20x^2 + 18x \cdot \frac{3}{x^2} = \\ &= 20x^2 + \frac{54}{x} \end{aligned}$$

Superficie del coperchio: $s_2(x) = 20x^2$.
Costo complessivo, da studiare per $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.1 \cdot s_1(x) + 0.035 \cdot s_2(x) = \\ &= 0.1 \left(20x^2 + \frac{54}{x} \right) + 0.035 \cdot 20x^2 = \\ &= 2.7x^2 + \frac{5.4}{x} \\ f'(x) &= 5.4x - \frac{5.4}{x^2} = \frac{5.4(x^3 - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

$f'(x) > 0 \quad \iff \quad x^3 > 1 \quad \iff \quad x > 1.$
$f(x)$ è decrescente in $]0, 1]$ e crescente in $[1, +\infty[$.
Dunque $x = 1$ è punto di minimo.
Costo minimo: $f(1) = 2.7 + \frac{5.4}{1} = 8.10$.

Problema. *Usando 24 metri di fil di ferro, si vogliono costruire le facce laterali di una gabbia a forma di parallelepipedo con base quadrata come mostrato in figura. Quali devono essere le dimensioni del parallelepipedo per ottenere il volume massimo?*



Risoluzione. *Unità di misura:* m.

Siano x e h le misure del lato di base e dell'altezza della gabbia.

Contiamo le stanghette orizzontali, che hanno misura x, e quelle verticali, che hanno misura h:

stanghette orizzontali: 20 (5 per ogni faccia);
stanghette verticali: 16 (4 per ogni faccia).

N.B. Ogni spigolo verticale è comune a due facce.

Complessivamente la misura delle stanghette è:

$$20x + 16h = 24 \qquad \text{da cui} \qquad h = \frac{24 - 20x}{16} = \frac{6 - 5x}{4}$$

Il volume $x^2 h$ si esprime così in funzione di x:

$$f(x) = x^2 \frac{6 - 5x}{4} = \frac{1}{4}(6x^2 - 5x^3)$$

Tenendo conto che deve essere $h \geq 0$, abbiamo le limitazioni $0 \leq x \leq \frac{6}{5}$.

La condizione di crescenza

$$f'(x) = \frac{1}{4}(12x - 15x^2) > 0$$

è verificata per $0 < x < \frac{4}{5}$ e quindi il punto $x = \frac{4}{5}$ è di massimo.

Misure richieste:

lato di base: $x = 0.8$ altezza: $h = \frac{6 - 5 \cdot 0.8}{4} = 0.5$

Studiare la funzione $f(x) = x^x$

Dominio: $x > 0$.

Limiti. In 0^+ ha la forma indeterminata $\mathbf{0^0}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\log x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = e^0 = 1$$

Nella riga precedente si è usato che:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\log x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\cdot(-x^2)\right) = \lim_{x\to 0^+} -x = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x\log x} = e^{(+\infty)\cdot(+\infty)} = +\infty$$

Non esiste asintoto obliquo a $+\infty$ perché:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{x-1} = \lim_{x\to+\infty} e^{(x-1)\log x} = \\ &= e^{(+\infty)\cdot(+\infty)} = +\infty\end{aligned}$$

Derivata prima. Si calcola $\boldsymbol{D}\, e^{x\log x}$, cioè:

$$f'(x) = e^{x\log x}\left(\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = e^{x\log x}(1+\log x)$$

La condizione $f'(x) > 0$ è verificata per $1+\log x > 0$, cioè $\log x > -1$, vale a dire $x > e^{-1}$. Perciò $f(x)$ è:

decrescente in $0 < x < e^{-1}$
crescente in $x > e^{-1}$.

$x = e^{-1}$ è punto di minimo relativo con
$f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-e^{-1}} > 0$.

Si è ottenuto: $\boldsymbol{f'(x) = e^{x\log x}(1+\log x)}$

Attacco in $\mathbf{0^+}$.

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\log x}(1+\log x) = e^0(1-\infty) = -\infty$$

Per $x \to 0^+$ la retta tangente tende alla posizione verticale.

Derivata seconda:

$$f''(x) = e^{x\log x}(1+\log x)^2 + e^{x\log x}\cdot\frac{1}{x}$$

I termini $e^{x\log x}$, $(1+\log x)^2$, $\frac{1}{x}$ sono positivi per ogni x (del dominio) e perciò è $f''(x) > 0$ per ogni x e dunque $f(x)$ è convessa nell'intervallo $x > 0$. **Non ci sono flessi.**

Grafico. $f(x) = x^x$ tende a $+\infty$ più rapidamente di e^x.