

SPAZI COMPATTI

D'ora in poi tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff.

Definizione 1 *Uno spazio topologico (X, τ) si dice **sequenzialmente compatto**, o **compatto per successioni**, se ogni successione di punti di X ammette una sottosuccessione convergente in X .*

Proposizione 2 *Sia (X, d) uno spazio metrico. Se esso è sequenzialmente compatto allora è completo.*

Definizione 3 *Sia (X, d) uno spazio metrico.*

*Un sottoinsieme $E \subseteq X$ si dice **totalmente limitato** se per ogni $\varepsilon > 0$, E può essere ricoperto da un numero finito di palle di raggio ε , cioè esistono $x_1, \dots, x_{n(\varepsilon)} \in X$ tali che:*

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n(\varepsilon)} B(x_j, \varepsilon]$$

Osservazioni.

- Le palle si possono prendere indifferentemente aperte o chiuse.
- I centri delle palle si possono prendere in E .
- Un sottoinsieme di un insieme totalmente limitato è totalmente limitato.
- Ogni sottoinsieme totalmente limitato è limitato.
- Il concetto di totalmente limitato è invariante per metriche Lipschitz-equivalenti.

Proposizione 4 *Ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{K}^n$ è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Dimostriamolo dapprima per $\mathbb{R}$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Se E è limitato, allora $E \subseteq [a, b]$.

Se $\varepsilon > 0$ prendiamo come centri delle ε -palle i punti della suddivisione:

$$D = \{x_0 = a, x_1 = a + \varepsilon, \dots, x_m = a + m\varepsilon\} \quad \text{con } m \text{ parte intera di } \frac{b-a}{\varepsilon}$$

Si osservi che D ha maglia al più ε .

In $\mathbb{R}^n$ usiamo la metrica di $\|\cdot\|_\infty$.

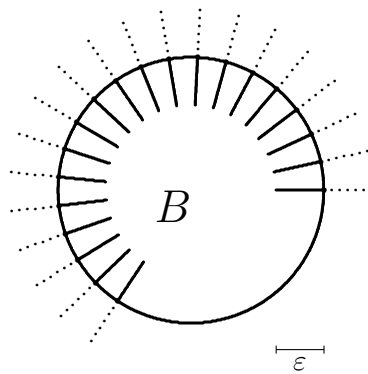
Se E è limitato, allora $E \subseteq \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

Dato $\varepsilon > 0$, prendiamo una suddivisione D_i di ogni intervallo $[a_i, b_i]$ con maglia al più ε . I centri delle ε -palle (cubi) sono tutti i punti dell'insieme finito $\prod_{i=1}^n D_i$.

Infine $\mathbb{C}^n$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ tramite un'isometria. $\square$

Esempio. Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$.

Con la metrica del riccio, B è limitato ma non totalmente limitato.



Definizione 5 Sia X uno spazio topologico.

Un **ricoprimento aperto** di X è una famiglia $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ di aperti di X che ricopre X , cioè tale che:

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

Un **sottoricoprimento** di $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$

è una sottofamiglia $\{U_\lambda : \lambda \in M\}$, $M \subseteq \Lambda$, che è ancora un ricoprimento.

Osservazione. La nozione di ricoprimento aperto si può dare anche per un sottospazio Y di X : si dice ricoprimento aperto di Y una famiglia di aperti di X la cui unione contiene Y .

Esempio.

- In $\mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ sia $U_n =]n, n + \frac{3}{2}[$.

La famiglia $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$;

essa non ammette sottoricoprimenti propri.

La famiglia $\{B(q, \frac{3}{4}[: q \in \mathbb{Q}\}$ è un ricoprimento aperto che ha $\mathcal{U}$ come sottoricoprimento.

- Sia B il disco unitario di $\mathbb{R}^2$ con la metrica d del riccio.

Sia $\mathcal{U} = \{B_d(u, 1[: u = 0 \text{ oppure } |u| = 1\}$.

Tale $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di B privo di sottoricoprimenti propri.

Qual è il cardinale di $\mathcal{U}$?

- Sia X un insieme con metrica discreta.

La famiglia dei singoletti $\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto.

Esercizio. Costruire un ricoprimento infinito della retta di Sorgenfrey costituito da aperti propri a due a due disgiunti.

Esercizio. È possibile costruire un ricoprimento aperto non banale di $\mathbb{R}$ formato da aperti a due a due disgiunti? No!

Risoluzione. Sia A uno di tali aperti e sia $a \in A$.

Sia J l'unione di tutti gli intervalli aperti contenenti a e contenuti in A . L'insieme J è un intervallo aperto perché è unione di intervalli aperti con un punto in comune.

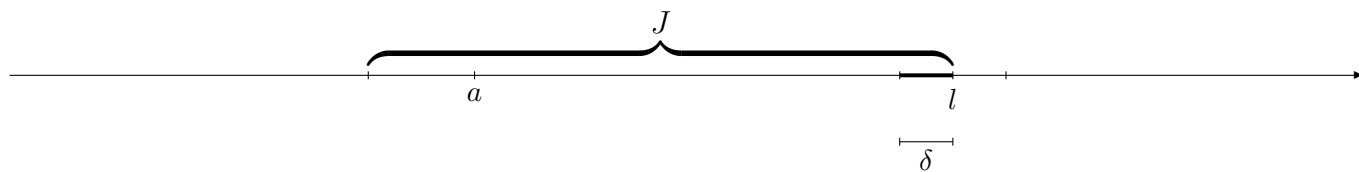
Ovviamente $J \subseteq A$ e quindi $J \neq \mathbb{R}$.

Perciò J è limitato da almeno una parte, ad esempio superiormente.

Sia $l = \sup J$. Allora $l \notin A$, altrimenti $[l, l + \varepsilon[\subseteq A$ e dunque $[a, l + \varepsilon[\subseteq J$ e l non sarebbe più il sup di J .

Di conseguenza esiste un elemento B del ricoprimento tale che $l \in B$. Essendo B aperto, esso contiene un intervallo aperto $]l - \delta, l + \delta[$.

Si ottiene dunque $B \cap J \supseteq]l - \delta, l[\neq \emptyset$, da cui $B \cap A \neq \emptyset$.



Osservazione. Una dimostrazione analoga mostra che ogni intervallo di $\mathbb{R}$ è **connesso**, cioè non è unione di (almeno) due insiemi aperti non vuoti a due a due disgiunti.

Definizione 6 *Uno spazio topologico si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.*

Questa definizione si applica anche ai sottospazi.

Esempi.

- Uno spazio discreto è compatto $\iff$ è finito.
- In uno spazio topologico supponiamo di avere una successione convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e sia a il suo limite. Allora il sottospazio

$$S = \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

è compatto.

- Qualunque sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}$ non è compatto (se è superiormente illimitato, considerare tutte le semirette aperte decrescenti).
- Nella retta di Sorgenfrey l'intervallo $[0, 1]$ non è compatto.

Proposizione 7 *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio (sequenzialmente) compatto è (sequenzialmente) compatto.*

Esercizio. Siano X uno spazio di Hausdorff, $K \subseteq X$ un sottospazio compatto, $p \in X \setminus K$.

Esistono un intorno aperto V di p e un aperto A contenente K tali che $V \cap A = \emptyset$.

Risoluzione. Per ogni $x \in K$ esistono un intorno aperto V_x di p e un intorno aperto U_x di x tali che $V_x \cap U_x = \emptyset$.

La famiglia $\mathcal{U} = \{U_x : x \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K che ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$.

Gli aperti richiesti sono:

$$V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n} \quad A = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

Esercizio. In uno spazio di Hausdorff, due insiemi compatti disgiunti sono contenuti in aperti disgiunti.

Attenzione (per ora non si può giustificare):

esistono spazi sequenzialmente compatti che non sono compatti;
esistono spazi compatti che non sono sequenzialmente compatti.

Negli spazi metrici le due definizioni coincidono.

Lemma 8 *Uno spazio metrico (X, d) non è totalmente limitato $\iff$ esistono $\varepsilon > 0$ e un insieme infinito numerabile $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ tale che*

$$d(x_j, x_k) \geq \varepsilon \quad \text{per ogni coppia di indici distinti } j, k.$$

Dimostrazione. Sufficienza. Se esiste un tale insieme, una palla aperta di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$ può contenere al più un punto x_j . Pertanto non esiste un ricoprimento finito di palle di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$.

Necessità. Sia $\varepsilon > 0$ tale che la famiglia $\{B(x, \varepsilon[: x \in X\}$ non ammette sottoricoprimenti finiti. Costruiamo l'insieme richiesto per induzione.

Sia $x_0 \in X$;

esiste $x_1 \in X \setminus B(x_0, \varepsilon[$.

Se $x_0, x_1, \dots, x_j$ sono stati presi in modo che

$$x_k \notin \bigcup_{h < k} B(x_h, \varepsilon[\quad \forall k \leq j$$

si scelga $x_{j+1} \in X \setminus \bigcup_{k \leq j} B(x_k, \varepsilon[$. $\square$

Teorema 9 (Teorema fondamentale) *Sia (X, d) uno spazio metrico. Sono equivalenti:*

i) X è sequenzialmente compatto.

ii) X è completo e totalmente limitato.

iii) X è compatto.

Dimostrazione. $\boxed{i \Rightarrow ii}$ Ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.

Allora ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente e quindi converge: pertanto X è completo.

Se X non fosse totalmente limitato, per il lemma esisterebbero $\varepsilon > 0$ e un insieme infinito $S = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ tale che la distanza di due punti distinti di S è almeno ε . Consideriamo la successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Ogni suo sottoinsieme con più di un punto ha diametro almeno ε , in particolare le m -code delle sue sottosuccessioni. Pertanto essa non ha sottosuccessioni di Cauchy (in particolare, convergenti), in contraddizione con l'ipotesi.

$ii \Rightarrow iii$ Supponiamo per assurdo che esista un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X che non ammette sottoricoprimenti finiti.

Diciamo che:

$E \subseteq X$ ha la proprietà $\mathcal{P}$ se:

E non è contenuto

nell'unione di nessuna sottofamiglia finita di $\mathcal{U}$.

Usiamo più volte l'ipotesi che X (e ogni suo sottospazio) è totalmente limitato.

Esiste un numero finito di palle di raggio 1 la cui unione copre X : pertanto esiste una palla di raggio 1, diciamo $B_1 = B(x_1, 1[$, che ha la proprietà $\mathcal{P}$.

Esiste un numero finito di palle di raggio $\frac{1}{2}$, con centri in B_1 , la cui unione copre B_1 : allora esiste $B_2 = B(x_2, \frac{1}{2}[$, con $x_2 \in B_1$ tale che $B_1 \cap B_2$ ha la proprietà $\mathcal{P}$.

Procedendo per induzione, si costruisce una successione $B_j = B(x_j, \frac{1}{j}[$ con $x_j \in B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{j-1}$ tale che $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_j$ ha la proprietà $\mathcal{P}$ per ogni $j \geq 1$.

Dato che la m -coda della successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è contenuta in B_{m-1} , essa ha diametro $\leq \frac{2}{m-1}$; pertanto la successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, e dunque convergente a un punto $p \in X$.

Esiste un aperto $U \in \mathcal{U}$ tale che $p \in U$.

Sia $\delta > 0$ tale che $B(p, \delta[\subseteq U$.

Per definizione di limite, esiste $\bar{j}$ tale che $x_j \in B(p, \frac{\delta}{2}[$ per ogni $j \geq \bar{j}$.

Sia $k \geq \bar{j}$ tale che $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{2}$.

Allora (la $\star$ di seguito vale perché $x_k \in B(p, \frac{\delta}{2}[$):

$$B_k = B(x_k, \frac{1}{k}[\subseteq B(x_k, \frac{\delta}{2}[\stackrel{\star}{\subseteq} B(p, \delta[\subseteq U$$

in contraddizione con il fatto che $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k$ ha la proprietà $\mathcal{P}$.

iii $\Rightarrow$ *i* Sia $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di X .

Siccome X è metrico, dobbiamo dimostrare che esiste un punto $p \in X$ tale che la successione data sta frequentemente in ogni intorno di p .

Se per assurdo ciò non fosse, per ogni $x \in X$ esisterebbe un intorno aperto V_x di x tale che

$x_j \in V_x$ solo per un numero finito di indici j .

Il ricoprimento aperto

$$\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$$

ammette un sottoricoprimento finito, diciamo $\{V_{\xi_1}, \dots, V_{\xi_m}\}$.

Ma allora $X = V_{\xi_1} \cup \dots \cup V_{\xi_m}$ contiene elementi della successione solo per un numero finito di indici, assurdo. $\square$

Definizione 10 Sia $\mathcal{F} = \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X .

Si dice che $\mathcal{F}$ ha la **proprietà dell'intersezione finita** o **fip** se

$$F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_k} \neq \emptyset \quad \text{per ogni insieme finito } \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq \Lambda.$$

Proposizione 11 Uno spazio topologico è compatto $\iff$ ogni famiglia di chiusi con la fip ha intersezione non vuota.

Dimostrazione.

$$X \setminus \bigcap_{\lambda} F_{\lambda} = \bigcup_{\lambda} (X \setminus F_{\lambda})$$

$\square$

Proposizione 12 I sottospazi compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi.

Dimostrazione. Ricordare che in uno spazio di Hausdorff ogni punto è intersezione dei propri interni chiusi.

Una dimostrazione alternativa si ottiene usando il penultimo esercizio di pag. 5.

$\square$

Siano X uno spazio di Hausdorff e Y un suo sottospazio compatto: allora Y è chiuso.

Se X è metrico, allora Y , essendo totalmente limitato, risulta anche limitato. Se Y è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$, è vero anche il viceversa.

Teorema 13 *Un sottospazio Y di $\mathbb{K}^n$ è compatto $\iff Y$ è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Necessità. Abbiamo visto che è vera in qualsiasi spazio metrico.

Sufficienza. Y è completo perché sottospazio chiuso di uno spazio completo. Y è totalmente limitato perché sottospazio limitato di $\mathbb{K}^n$.

Pertanto Y è compatto per il teorema fondamentale. $\square$

Conseguenze:

- Ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo assoluto.
- Le palle chiuse di $\mathbb{K}^n$ sono compatte (in particolare la palla unitaria).

Proposizione 14 *In uno spazio normato X di dimensione infinita la palla unitaria non è totalmente limitata (e quindi non è compatta).*

(Dimostrazione omessa)

Teorema 15 *Uno spazio metrico Y è compatto se e solo se per ogni sottoinsieme infinito $E \subseteq Y$ esiste almeno un punto p di Y che è di accumulazione per E (cioè $E' \neq \emptyset$).*

Spazi compatti e prodotto

Teorema 16 (Kuratowski) *Siano X uno spazio compatto e Y uno spazio di Hausdorff.*

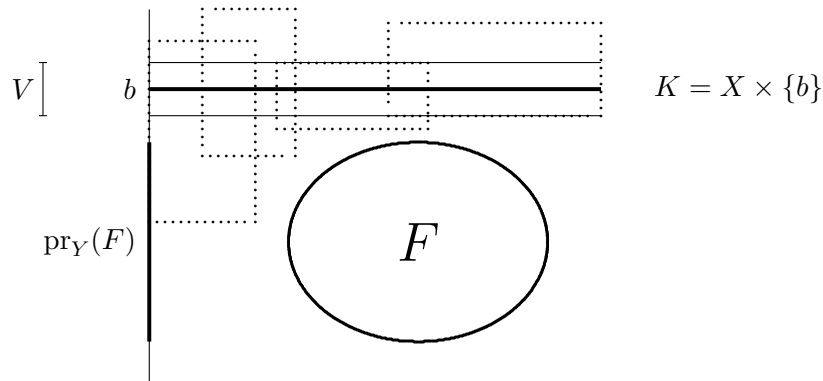
La proiezione $\text{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ è chiusa.

Dimostrazione. Siano F un chiuso di $X \times Y$ e $b \notin \text{pr}_Y(F)$.

Allora $K = X \times \{b\}$ è un compatto di $X \times Y$ disgiunto da F .

Poiché F è chiuso, per ogni $(x, b) \in K$ esistono un intorno aperto U_x di x e un intorno V_x di b tali che $(U_x \times V_x) \cap F = \emptyset$.

Il ricoprimento $\{U_x : x \in X\}$ di X ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$.



Sia $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$. Si ha:

$$X \times V = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) \times V = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \times V)$$

Poiché ogni termine di quest'ultima unione è disgiunto da F , si ottiene $(X \times V) \cap F = \emptyset$ e dunque $V \cap \text{pr}_Y(F) = \emptyset$.

In conclusione, $Y \setminus \text{pr}_Y(F)$ è aperto. $\square$

Teorema 17 (Tychonoff) *Siano X e Y spazi (sequenzialmente) compatti.*

Allora $X \times Y$ è (sequenzialmente) compatto.

Dimostrazione. Caso sequenzialmente compatto: v. libro.

Caso *compatto*.

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di chiusi di $X \times Y$ con la *fip* e sia $\mathcal{G}$ la famiglia costituita da tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{F}$. Allora $\mathcal{G}$ è una famiglia di chiusi non vuoti *chiusa per l'intersezione finita*, cioè contenente le intersezioni di tutte le sue sottofamiglie finite.

Essendo Y compatto, la sottofamiglia di $\mathcal{P}(X)$ costituita da

$$\text{pr}_X(\mathcal{G}) = \{\text{pr}_X(G) : G \in \mathcal{G}\}$$

è una famiglia di chiusi (perché?) di X con la *fip*. Infatti:

$$\text{pr}_X(G_1) \cap \text{pr}_X(G_2) \supseteq \text{pr}_X(G_1 \cap G_2) \neq \emptyset$$

Essendo X compatto, la famiglia $\text{pr}_X(\mathcal{G})$ ha intersezione non vuota.

Sia $a \in \bigcap \text{pr}_X(\mathcal{G})$.

Consideriamo in $\{a\} \times Y$ la famiglia delle a -sezioni di $\mathcal{G}$, cioè:

$$\mathcal{G}_a = \{G \cap (\{a\} \times Y) : G \in \mathcal{G}\}$$

Essa è una famiglia di chiusi di $\{a\} \times Y$ con la *fip*. Infatti, se $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ si ha:

$$(G_1 \cap (\{a\} \times Y)) \cap (G_2 \cap (\{a\} \times Y)) = (G_1 \cap G_2) \cap (\{a\} \times Y)$$

che è non vuoto perché $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ e quindi $a \in \text{pr}_X(G_1 \cap G_2)$.

Poiché $\{a\} \times Y$ è compatto, si ottiene $\bigcap \mathcal{G}_a \neq \emptyset$ e dunque:

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{G} \supseteq \bigcap \mathcal{G}_a \neq \emptyset$$

□

Esercizio. Dimostrare che il prodotto di due spazi metrici totalmente limitati è totalmente limitato nella metrica prodotto.

Senza usare il teorema di Tychonoff, dedurre che il prodotto di due spazi metrici compatti è compatto.

Spazi compatti e funzioni continue

L'immagine continua di uno spazio compatto è uno spazio compatto, cioè:

Teorema 18 *Se X e Y sono spazi di Hausdorff, con X compatto, e $f : X \rightarrow Y$ è continua, allora $f(X)$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{V}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$.
L'antiimmagine di $\mathcal{V}$, cioè la famiglia

$$\{f^{\leftarrow}(V) : V \in \mathcal{V}\}$$

ammette un sottoricoprimento finito, diciamo:

$$\{f^{\leftarrow}(V_1), \dots, f^{\leftarrow}(V_k)\}$$

Poiché

$$X \subseteq f^{\leftarrow}(V_1) \cup \dots \cup f^{\leftarrow}(V_k) = f^{\leftarrow}(V_1 \cup \dots \cup V_k),$$

si ottiene $f(X) \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_k$. $\square$

Lasciamo come esercizio la dimostrazione di:

Teorema 19 *L'immagine continua di uno spazio sequenzialmente compatto è uno spazio sequenzialmente compatto.*

Corollario 20 (Teorema di Weierstrass) *Ogni funzione continua a valori reali definita su un compatto non vuoto ha minimo e massimo assoluti.*

Dimostrazione. L'immagine è compatta, quindi chiusa e limitata in $\mathbb{R}$. $\square$

Osservazione. In precedenza abbiamo usato questo teorema, applicandolo ai chiusi e limitati di $\mathbb{K}^n$, per dimostrare che un isomorfismo lineare con dominio $\mathbb{K}^n$ ha inverso continuo.

Corollario 21 *Siano X e Y spazi di Hausdorff con X compatto. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua. Allora f è chiusa.*

Se f è biiettiva, allora f^{-1} risulta continua.

Morale: una biiezione continua con dominio compatto è un omeomorfismo.

Se σ e τ sono due topologie su un insieme X , si dice che σ è **meno fine** di τ , e si scrive $\sigma \leq \tau$, se ogni aperto in σ è aperto anche in τ .

Tale relazione $\leq$ è di ordine parziale e quindi ha senso parlare di elementi minimali e di elementi massimali.

Corollario 22 *Su un insieme X le topologie compatte sono minimali fra le topologie di Hausdorff, cioè se τ è compatta e $\sigma \leq \tau$, allora $\sigma = \tau$.*

Dimostrazione. L'identità $(X, \tau) \longrightarrow (X, \sigma)$ è continua perché $\sigma \leq \tau$.

Allora essa è un omeomorfismo e quindi gli aperti in τ sono aperti in σ . $\square$

Esercizio. Considerare $C([0, 1])$ con la topologia della convergenza uniforme (indotta da $\| \cdot \|_\infty$). Dare un esempio di una successione limitata di funzioni che non ha sottosuccessioni convergenti.

Esercizio. Sia S la retta di Sorgenfrey.

- i) Dimostrare che $F \subseteq S$ è chiuso $\iff$ per ogni sottoinsieme $E \subseteq F$ che sia non vuoto e inferiormente limitato si ha $\inf E \in F$.
- ii) Sia $K \subseteq S$. Se K ammette una successione strettamente crescente di punti, allora K non è compatto.
- iii) Dimostrare che un sottoinsieme K di S è compatto $\iff$ per ogni sottoinsieme non vuoto $E \subseteq K$, esistono sia $\inf E$ sia $\max E$ e appartengono a K .

Esercizio. Siano X e Y spazi di Hausdorff con Y compatto, $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Si supponga che il grafico di f

$$G(f) = \{(x, y) : y = f(x)\}$$

sia un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$.

Dimostrare che f è continua.

Sugg. Sia C chiuso di Y . Allora:

$$f^{\leftarrow}(C) = \text{pr}_X((X \times C) \cap G(f))$$