INSIEMI

Se X è un insieme, indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X (sono elementi di $\mathcal{P}(X)$ anche $\emptyset$ e X).

Sia $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una famiglia di insiemi.
Definiamo:

unione $\quad \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$

è l'insieme U tale che $x \in U \iff x \in A_\lambda$ per **qualche** $A_\lambda \in \mathcal{A}$ (cioè per qualche indice $\lambda \in \Lambda$).

intersezione $\quad \bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$

è l'insieme D tale che $x \in D \iff x \in A_\lambda$ per **ogni** $A_\lambda \in \mathcal{A}$ (cioè per ogni indice $\lambda \in \Lambda$).

Sia X un insieme e sia $A \subseteq X$.
Si definisce il **complementare** di A:

$$X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$$

Leggi di dualità di de Morgan:

$$X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$$

$$X \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$$

Siano $f : X \to Y$ una funzione e siano $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ e $\{B_\mu : \mu \in M\}$ sottoinsiemi di $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{P}(Y)$ rispettivamente:

$$\begin{aligned}
f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) &= \bigcup_{\mu\in M} f^{\leftarrow}(B_\mu) \\
f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) &= \bigcap_{\mu\in M} f^{\leftarrow}(B_\mu) \\
f^{\leftarrow}(Y \setminus B) &= X \setminus f^{\leftarrow}(B) \\
f\left(\bigcup_{\lambda\in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda\in \Lambda} f(A_\lambda) \\
f\left(\bigcap_{\lambda\in \Lambda} A_\lambda\right) &\subseteq \bigcap_{\lambda\in \Lambda} f(A_\lambda)
\end{aligned}$$

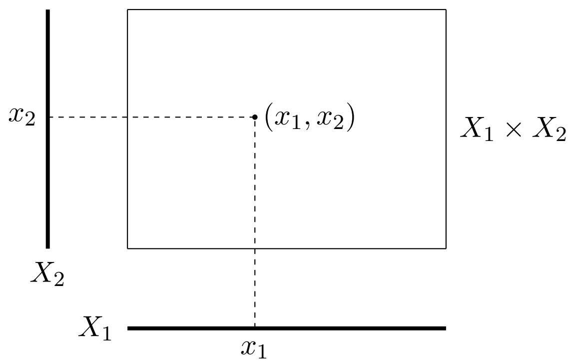
$f(x) = x^2$ mostra che l'ultima inclusione può essere propria.

Dati gli insiemi X_1 e X_2, il loro prodotto è l'insieme X così definito:

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : \ x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2\}$$

Le proiezioni pr_1 e pr_2 sono così definite:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{pr}_1 : X \longrightarrow X_1 & \qquad & (x_1, x_2) \longrightarrow x_1 \\
\mathrm{pr}_2 : X \longrightarrow X_2 & \qquad & (x_1, x_2) \longrightarrow x_2
\end{array}$$



Dati gli insiemi X_j con $j = 1, \dots, n$, il loro prodotto è:

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) : \; x_j \in X_j, \; \forall\, j = 1, \dots, n\}$$

La proiezione j-esima pr_j è data da:

$$\mathrm{pr}_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$$

Il prodotto finito di n insiemi è un insieme di n-uple ordinate.
Osservare che il prodotto può essere pensato come l'insieme
delle funzioni x con le seguenti proprietà:

$$x : \; \{1, \dots, n\} \longrightarrow \bigcup_{j=1}^{n} X_j$$
$$x(j) \in X_j \quad \forall\, j = 1, \dots, n$$

Si definisce il prodotto di una famiglia di insiemi $\{X_\lambda : \; \lambda \in \Lambda\}$ come l'insieme X delle funzioni (o *stringhe*) x con le proprietà:

dominio Λ
codominio $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$
$x(\lambda) \in X_\lambda \quad \forall\, \lambda \in \Lambda$

Invece di $x(\lambda)$ si scrive x_λ;
è comodo scrivere x come stringa:

$$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

La proiezione pr_λ è definita da $\mathrm{pr}_\lambda(x) = x_\lambda$.
Se $X_\lambda = Y$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, il prodotto si scrive nella forma esponenziale:

$$Y^\Lambda = \{\text{tutte le funzioni con dominio } \Lambda \text{ e codominio } Y\}$$

Una **relazione** $\mathcal{E}$ su un insieme X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$.
Si scrive $x\mathcal{E}y$ al posto di $(x, y) \in \mathcal{E}$.
Una **relazione di equivalenza** è una relazione con le seguenti proprietà:

(E_1) $\forall\, x \in X$ si ha $x\mathcal{E}x$ (riflessiva).

(E_2) se $x\mathcal{E}y$ allora $y\mathcal{E}x$ (simmetrica).

(E_3) da $x\mathcal{E}y$ & $y\mathcal{E}z$ segue $x\mathcal{E}z$ (transitiva).

La **classe di equivalenza** di x è l'insieme:

$$[x] = \{y \in X : \ y\mathcal{E}x\}$$

Due classi di equivalenza o sono disgiunte o coincidono.
La relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ determina perciò una **partizione** di X, cioè una decomposizione $\{A_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ di X in insiemi disgiunti:

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \text{con } A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \emptyset \text{ se } \lambda \neq \lambda'$$

Viceversa ogni partizione $\{A_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ determina la relazione di equivalenza definita da:

$$x\mathcal{E}y \quad \Longleftrightarrow \quad x, y \in A_\lambda \text{ per qualche } \lambda \in \Lambda$$

Una **relazione d'ordine** (largo) su X è una relazione $\leq$ con le seguenti proprietà:

(O_1) $\forall\, x \in X$ si ha $x \leq x$ (riflessiva).

(O_2) da $x \leq y$ & $y \leq x$ segue $x = y$ (antisimmetrica).

(O_3) da $x \leq y$ & $y \leq z$ segue $x \leq z$ (transitiva).

L'ordine si dice **lineare** o **totale** se in più soddisfa:

(O_4) $\forall\, x, y \in X$ allora o $x \leq y$ o $y \leq x$.

Se si pone $x < y$ ogni qualvolta $x \leq y$ & $x \neq y$, si ottiene una relazione d'ordine **stretto** con le seguenti proprietà:

(S_1) se $x < y$ allora non vale $y < x$.

(S_2) da $x < y$ & $y < z$ segue $x < z$.

La totalità si scrive:

se $x \neq y$ allora o $x < y$ o $y < x$

Morale: si passa da un ordine largo a un ordine stretto o viceversa togliendo o aggiungendo la diagonale $\{(x, x) : \; x \in X\}$.
Spesso un ordine qualsiasi è detto **ordine parziale** per distinguerlo da un ordine totale.
Un insieme con una relazione d'ordine è detto:

parzialmente ordinato se l'ordine è parziale,
linearmente ordinato (o totalmente ordinato) se l'ordine è totale.

Dato un insieme parzialmente ordinato, si dice **catena** un sottoinsieme linearmente ordinato.
Un insieme ordinato si dice **bene ordinato** se ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo.

Se X è un insieme parzialmente ordinato, un elemento m si dice **massimale** se $m < x$ è falso per ogni $x \in X$
cioè se m è maggiore o uguale di tutti gli elementi confrontabili con lui.
La definizione di **minimale** si ottiene rovesciando le disuguaglianze.

Teorema 1 *Sono tra loro equivalenti:*

Assioma della scelta *Se $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è una famiglia disgiunta di insiemi non vuoti, esiste un insieme S tale che $S \cap E_\lambda$ contiene un unico elemento per ogni $\lambda \in \Lambda$.*

Assioma del prodotto *Se $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è una famiglia di insiemi non vuoti, allora $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ non è vuoto.*

Lemma di Zorn *Sia X un insieme parzialmente ordinato in cui ogni catena ha un maggiorante; allora X ha un elemento massimale.*

Principio del buon ordinamento *Ogni insieme ammette un buon ordinamento, cioè è bene ordinabile.*

CARDINALI

Due insiemi si dicono **equipotenti** se tra essi esiste una biiezione.
Se $f : X \to Y$ è una biiezione, si dice che X e Y sono equipotenti tramite f.

- Ogni insieme è equipotente a sé stesso tramite l'identità.
- Se X e Y sono equipotenti tramite f, allora Y e X sono equipotenti tramite f^{-1}.
- Se X e Y sono equipotenti tramite f e Y e Z sono equipotenti tramite g, allora X e Z sono equipotenti tramite $g \circ f$.

Questo dice che la relazione di equipotenza è una relazione di equivalenza.
Si dice che due insiemi hanno lo stesso **cardinale** se sono equipotenti.
Per ogni classe di equipotenza si sceglie un oggetto che si chiama **numero cardinale**.
Il cardinale di X si indica con $|X|$ oppure $\operatorname{card} X$.
I cardinali si indicano con lettere gotiche ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$,...).
Diremo che $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ se esiste una iniezione da X a Y, cioè se X è equipotente a un sottoinsieme di Y.
Questa relazione $\leq$ è ovviamente riflessiva e transitiva; il seguente teorema assicura che è antisimmetrica.

Teorema 2 (Cantor, Schröder, Bernstein) *Se esiste $f : X \to Y$ iniettiva e se esiste $g : Y \to X$ iniettiva, allora esiste $h : X \to Y$ biiettiva.*

(Dimostrazione difficile.)

Proposizione 3 *Se esiste una mappa suriettiva $f : X \to Y$, allora* $\operatorname{card} X \geq \operatorname{card} Y$.

Dimostrazione. Per ogni $y \in Y$ scegliamo un elemento $g(y) \in f^{\leftarrow}(y)$. Ovviamente g è iniettiva perché elementi distinti di Y
hanno antiimmagini disgiunte. □

Poniamo $I_0 = \emptyset$,
per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ poniamo $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Si ha: $\operatorname{card} I_n = n$.
Un insieme si dice finito se è equipotente a qualche I_n, altrimenti si dice infinito.

Proposizione 4 *Sia X un insieme infinito.*
Esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to X$.

Corollario 5 *Ogni insieme infinito X è equipotente a un suo sottoinsieme proprio.*

Dimostrazione. X contiene una copia di $\mathbb{N}$, diciamo $f(\mathbb{N})$.
Basta mandare $X \setminus f(\mathbb{N})$ in sé stesso tramite l'identità e $f(n)$ in $f(2n)$. □

Esercizio.

- Dimostrare che ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ è equipotente a $\mathbb{N}$.
- Dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contenga un intervallo non degenere è equipotente a $\mathbb{R}$.

Proposizione 6 *Si ha* $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$.

Dimostrazione. $x \to \{x\}$ è un'iniezione di X in $\mathcal{P}(X)$.
Se $f : X \to \mathcal{P}(X)$ è una funzione, dimostriamo che f non può essere suriettiva (quindi nemmeno biiettiva).
Sia $A \in \mathcal{P}(X)$ così definito:

$$A = \{x \in X : \; x \notin f(x)\}$$

Verifichiamo che $A \notin f(X)$.
Se appartenesse, esisterebbe $a \in X$ tale che $f(a) = A$.
A questo punto non si può decidere senza contraddizione se $a \in f(a) = A$. $\square$

Con 2^X indichiamo $\{0,1\}^X$, cioè l'insieme delle funzioni da X a $\{0,1\}$.

Proposizione 7 *Gli insiemi* $\mathcal{P}(X)$ *e* 2^X *sono equipotenti.*

Dimostrazione. Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$, sia χ_A la funzione caratteristica di A, cioè:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

La mappa $A \longrightarrow \chi_A$ è la biiezione richiesta. $\square$

Assumiamo come principio che ogni famiglia di cardinali ha minimo.
Ogni insieme che si immerge in $\mathbb{N}$ si dice **numerabile**.
Poiché ogni insieme infinito contiene una copia di $\mathbb{N}$, il minimo cardinale infinito è $\operatorname{card} \mathbb{N}$: esso si indica con il simbolo ω oppure $\aleph_0$ (Alef).
Il successore di $\aleph_0$ (minimo dei rimanenti) si indica con $\aleph_1$.
Il cardinale di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ si indica con $\mathfrak{c}$ e si chiama **cardinale del continuo**.
Non si può decidere se $\mathfrak{c} = \aleph_1$.
Sia $\mathfrak{m} = \operatorname{card} X$ e $\mathfrak{n} = \operatorname{card} Y$. Si definisce:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \operatorname{card}(X \cup Y) \qquad \text{se } X \text{ e } Y \text{ sono disgiunti}$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \operatorname{card}(X \times Y)$$

Se $\mathfrak{m}$ è infinito si ha:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}\mathfrak{n} = \max\{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$$

In particolare si ha il teorema fondamentale dell'aritmetica dei cardinali:

Teorema 8 *Ogni insieme infinito X è equipotente a $X \times X$. Per ogni cardinale infinito $\mathfrak{m}$ si ha $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.*

Esercizio. Da $\omega^2 = \omega$ dedurre che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Se $\operatorname{card} X = \mathfrak{m}$, si definisce l'esponenziale di $\mathfrak{m}$:

$$2^{\mathfrak{m}} = \operatorname{card} 2^X = \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$$

Abbiamo dimostrato prima che $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$.

Proposizione 9 *Si ha:* $\operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card}[0,1] = \operatorname{card}\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$.

Traccia di dimostrazione. Basta costruire due mappe $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$, la prima suriettiva e la seconda iniettiva.
Sia $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione binaria (cioè $x_i = 0$ oppure $x_i = 1$). La prima mappa associa a x il numero reale:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}$$

Tale mappa è suriettiva (l'*espansione binaria* non è iniettiva a causa delle successioni definitivamente costanti).
La seconda mappa associa a x il numero reale:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2x_i}{3^{i+1}}$$

Tale *espansione triadica* è iniettiva perché non viene usata la cifra 1 (tra i tre intervalli, si pesca sempre dal primo e dal terzo). $\square$