Funzioni lineari fra spazi normati

Siano $X = C^1([a,b],\mathbb{R})$ e $Y = C([a,b],\mathbb{R})$, entrambi con la norma $\|\cdot\|_\infty$. L'operatore di derivazione $D: X \to Y$, che manda f nella sua derivata Df, è lineare e suriettivo (perché? chi è il suo nucleo?), ma non è continuo. Per esempio, consideriamo la successione

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{ove} \quad f_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

Essa converge in X (cioè uniformemente, $\|f_n\| \le \frac{1}{n}$) alla funzione costante 0 ; la successione delle derivate $(Df_n)(t) = \cos nt$ non converge uniformemente alla funzione costante 0
(anzi, tale successione non converge nemmeno puntualmente).
Morale: due funzioni vicine nella norma $\|\cdot\|_\infty$ possono avere pendenze molto lontane (v. testo, dopo 1.6.6).
Vogliamo ora caratterizzare la continuità degli operatori lineari fra spazi normati.

Teorema 1 *Siano X, Y spazi normati, $T: X \to Y$ funzione lineare. Sono equivalenti:*

i) T è continua.

ii) T è continua in un punto $x_0 \in X$.

iii) T è continua in 0 (vettore nullo di X).

iv) Esiste una costante reale $l > 0$ tale che:

$$(\star) \qquad \|Tx\|_Y \le l\|x\|_X \quad \forall\, x \in X$$

La costante l di $(\star)$ è costante di Lipschitz per T;
la minima costante di Lipschitz per cui vale $(\star)$ è data da:

$$\begin{aligned} l &= \sup\{\|Tx\|_Y : \ \|x\|_X \le 1\} = \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y : \ \|x\|_X = 1 \end{aligned}$$

Dimostrazione. $\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ Se T è continua in x_0, allora $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ è vera l'implicazione:

$$\|x - x_0\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

Poiché $Tx - Tx_0 = T(x - x_0)$, si ottiene, per ogni $v \in X$ (ogni vettore v si scrive come $x - x_0$):

$$\|v\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|Tv\| < \varepsilon$$

$\boxed{iii) \Rightarrow iv)}$ Usiamo la continuità in 0 con $\varepsilon = 1$. Esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\|v\| \leq \delta \ \Rightarrow \ \|Tv\| \leq 1$$

Sia ora x un vettore non nullo e sia $v = \frac{\delta}{\|x\|}x$. Poiché $\|v\| = \delta$, per la linearità si ottiene:

$$\frac{\delta}{\|x\|}\|Tx\| \leq 1$$

da cui

$$\|Tx\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\| \quad \forall\, x \in X$$

Dunque $l = \frac{1}{\delta}$.

$\boxed{iv) \Rightarrow i)}$ Per dimostrare la continuità in un punto qualsiasi x_0, fissiamo $\varepsilon > 0$. Posto $\delta = \frac{\varepsilon}{l}$, si ha:

$$\|x - x_0\| \leq \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq l\|x - x_0\| \leq l\delta = \varepsilon$$

Poiché $\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|$, si ha che la costante l di $(\star)$ è costante di Lipschitz per T.

L'affermazione conclusiva si ottiene osservando che per ogni $x \neq 0$

$$\|Tx\| \leq l\|x\| \iff \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq l$$

per cui la miglior costante di Lipschitz è esattamente $\sup\{\|Tu\| : \ \|u\| = 1\}$.

Poiché se $\|x\| < 1$ allora

$\|Tx\| = \|x\| \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$,

si ottiene che il sup sulla sfera S_X coincide con il sup sulla palla B_X. $\square$

Siano X e Y spazi normati su $\mathbb{K}$.
Indichiamo con $\mathrm{Hom}(X,Y)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da X in Y e con $L(X,Y)$ il sottospazio vettoriale (perché è sottospazio vettoriale?) delle applicazioni lineari continue.
Per il teorema precedente, un operatore lineare $T \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ è continuo $\iff$ T è limitato su B_X (o equivalentemente su S_X).

Esercizio. Sia $T \in \mathrm{Hom}(X,Y)$.
Dimostrare che $T \in L(X,Y) \iff T(A)$ è limitato in Y per ogni sottoinsieme limitato $A \subseteq X$.

$L(X,Y)$ diventa uno spazio normato con la seguente norma definita su ogni $T \in L(X,Y)$:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \ \|x\|_X = 1\}$$

Esercizio importante. Siano $T \in L(X,Y)$ e $A \subseteq X$ con $0 \notin A$:

$$\sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : \ x \in A\} \leq \|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : \ x \in (X \setminus \{0\})\}$$

Esercizio. Su $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidea, sia $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dimostrare che:

$$\|T\| = \max\{|\lambda_j| : \ j = 1, \dots, n\}$$

Esercizio. Su $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidea, con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, qual è la norma di $\mathrm{pr}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_j(x) = x_j$?
Quanto vale la norma di:

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j?$$

Per la seconda domanda, sia $v = (1, \ldots, 1)$.
Allora $\sigma(x) = x \cdot v$. Per la disuguaglianza di Schwarz:

$$|\sigma(x)| \leq |x| \cdot |v|$$

da cui $\|\sigma\| \leq |v| = \sqrt{n}$.
Si conclude che $\|\sigma\| = \sqrt{n}$ applicando σ al versore che ha tutte le coordinate uguali a $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Esercizio. Sia $X = C([a,b], \mathbb{R})$, $c \in [a,b]$, $\delta_c : X \to \mathbb{R}$ la valutazione in c

$$\delta_c(f) = f(c)$$

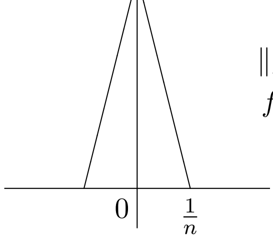
Dimostrare che:

1. Se su X c'è la sup norma $\| \cdot \|_\infty$, allora δ_c è continua.
   Quanto vale $\|\delta_c\|$?

2. Se su X c'è la norma della convergenza in media

   $$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

   allora δ_c non è continua.



$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \to 0 \\ f_n(0) &= \sqrt{n} \quad \to +\infty \end{aligned}$$

Esercizio. Siano $X = C([a,b],\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ e $c \in [a,b]$.

- Dimostrare che la funzione lineare $I_c : X \to X$, ove per ogni $f \in X$ la funzione $I_c(f)$ è così definita:
$$I_c(f)(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$
è continua e calcolarne la norma.

- Dimostrare che la funzione lineare $X \to \mathbb{R}$ definita da
$$f \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$$
è continua e calcolarne la norma.

Nel prossimo esercizio tenere presente l'esercizio importante di pag. 3.

Esercizio. Sia $X = C^1([a,b],\mathbb{R})$ con la norma
$$\|f\|_{(1)} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
e sia $Y = C([a,b],\mathbb{R})$ con la sup norma.
L'operatore di derivazione $D : X \to Y$ che manda f nella sua derivata Df è continuo e si ha $\|D\| = 1$.

Sugg.: usare $e^{\alpha t}$ e far tendere $\alpha \to +\infty$.

Esercizio importante Se $T : X \to Y$ è lineare e iniettiva, allora si ha l'inversa $T^{-1} : T(X) \to X$.
Dimostrare che T^{-1} è continua $\iff$:
$$\inf\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X = 1\} = \alpha > 0$$
In tal caso è $\|T^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$.

Traccia:
$$\frac{\|T^{-1}y\|}{\|y\|} = \frac{\|x\|}{\|Tx\|} = \left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{-1}$$
e si conclude osservando che il supremum dei reciproci è il reciproco dell'infimum.

Norme topologicamente equivalenti

Siano τ_α e τ_β due topologie su un insieme X.
τ_α si dice **più fine** di τ_β se ha più aperti (o equivalentemente più intorni), cioè la famiglia τ_β è un sottoinsieme della famiglia τ_α.
La seguente affermazione è immediata:

> τ_α è più fine di τ_β se e solo se
> la funzione identica $\mathrm{id} : (X, \tau_\alpha) \longrightarrow (X, \tau_\beta)$ è continua.

Se ora X è uno spazio vettoriale su cui sono definite due norme $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ che inducono le topologie τ_α e τ_β, il criterio di continuità per le applicazioni lineari porta alla seguente:

Proposizione 2 *i) La topologia indotta da $\|\cdot\|_\alpha$ è più fine di quella indotta da $\|\cdot\|_\beta$ se e solo se esiste $l > 0$ tale che:*

$$\|x\|_\beta \leq l\|x\|_\alpha, \quad \forall\, x \in X$$

ii) Le norme $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ sono topologicamente equivalenti (cioè inducono la stessa topologia) se e solo se esistono costanti $\lambda, l > 0$ tali che:

$$\lambda\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq l\|x\|_\alpha, \quad \forall\, x \in X$$

L'essere topologicamente equivalenti è una relazione di equivalenza.

Esempio. Su $\mathbb{R}^n$ le norme $|\cdot| = \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ sono topologicamente equivalenti. Infatti:

$$\|x\|_\infty \leq |x| \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Spazi metrici completi

Data una successione $x : \mathbb{N} \to X$, $j \to x_j$, una sua sottosuccessione è la composizione $x \circ \nu$, ove $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente.
Data una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, una sua sottosuccessione si scrive nella forma $(x_{\nu(j)})_{j\in\mathbb{N}}$, ove $\nu(j)$ è strettamente crescente.
Sia $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ come sottospazio di $\tilde{\mathbb{R}}$.
Se abbiamo una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a valori in uno spazio topologico separato X e $a \in X$, allora:

$$a = \lim_{j\to\infty} x_j \quad \iff \quad \forall\, V \in \mathcal{I}_a \;\exists\, \bar{j} \text{ tale che } x_j \in V \;\forall\, j \geq \bar{j}$$

cioè la successione sta definitivamente in ogni intorno di a: in tal caso si dice che **la successione converge** ad a.
Se X è metrizzabile dalla metrica d,
la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge ad $a \iff \lim\limits_{j\to\infty} d(x_j, a) = 0$.

Proposizione 3 *Sia X uno spazio topologico metrizzabile.*
Sia $x : \mathbb{N} \to X$ una successione a valori in X e sia $a \in X$.
Allora a è il limite di una sottosuccessione di x se e solo se per ogni intorno V di a si ha $x_j \in V$ per infiniti indici j (cioè la successione si trova ***frequentemente*** *in ogni intorno di a).*

Definizione 4 *Sia (X, d) uno spazio metrico.*
Una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è detta di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \;\forall\, n, m \geq n_\varepsilon$$

Detta $A_m = \{x_j \;:\; j \geq m\}$ la m-coda della successione, la successione numerica $(\operatorname{diam} A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è decrescente;
essa tende a $0 \iff$ la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Proposizione 5 *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione. Se a è il limite, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che la m-coda A_m è contenuta in $B(a, \varepsilon[$.
Pertanto $\operatorname{diam} A_n \leq \operatorname{diam} A_m \leq 2\varepsilon \; \forall\, n \geq m$. □

Attenzione: la nozione di successione di Cauchy è di carattere metrico e non topologico.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \arctan t$.
La metrica d_f definita da $d_f(t_1, t_2) = |f(t_1) - f(t_2)|$ induce la topologia usuale su $\mathbb{R}$; la successione dei numeri naturali è di Cauchy nella metrica d_f.

Definizione 6 *Uno spazio metrico (X, d) si dice* ***completo*** *se ogni successione di Cauchy in (X, d) converge in (X, τ_d).*

Esempi

- Ogni spazio discreto è completo nella metrica discreta.
- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ sono completi nella metrica euclidea (dopo).
- $\mathbb{R}$ non è completo nella metrica d_f.

Proposizione 7 *Dati gli spazi metrici (X, d) e (Y, ρ).*
Allora $X \times Y$ con la metrica prodotto d_∞ è completo se e solo se (X, d) e (Y, ρ) sono entrambi completi.

Traccia di dimostrazione. Basta osservare che una successione di punti del prodotto è di Cauchy $\iff$ le successioni "prima componente" e "seconda componente" sono entrambe di Cauchy. □

Lemma 8 *Se una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, allora è essa stessa convergente.*

Osservando che ogni successione di Cauchy è limitata e che ogni successione limitata di numeri reali ha una sottosuccessione convergente, dal precedente lemma segue che $\mathbb{R}$ è completo.
Usando la Prop. 7 si conclude che $\mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$ sono completi.
Dato che $\mathbb{C}$ è isometrico a $\mathbb{R}^2$, segue che $\mathbb{C}^n$ è completo.

Spazio di Banach = spazio vettoriale normato completo
Spazio di Hilbert = spazio di Banach la cui norma è indotta da un prodotto scalare (esempio: $\mathbb{K}^n$ con la norma euclidea).

Teorema 9 *1. Un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo è completo nella metrica indotta.*

2. Un sottospazio completo nella metrica indotta è chiuso.

Proposizione 10 *Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici, $T : X \to Y$ una funzione.*

i) Se T è lipschitziana, allora manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.

ii) Se T è biiettiva, lipschitziana con inversa lipschitziana, allora (X, d) è completo $\iff$ (Y, ρ) è completo.

Dimostrazione. Dimostriamo *i*: la *ii* è una facile conseguenza.
Sia L costante di Lipschitz per T.
Sia $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X e sia $y_j = Tx_j$ per ogni j.
Consideriamo la m-coda $B_m = \{y_j : j \geq m\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} B_m &= \sup\{\rho(y_k, y_l) : \ k, l \geq m\} \leq \\ &\leq \sup\{Ld(x_k, x_l) : \ k, l \geq m\} = L \operatorname{diam} A_m \end{aligned}$$

ove A_m è la m-coda della successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$.
Poiché $\operatorname{diam} A_m \to 0$, si ottiene $\operatorname{diam} B_m \to 0$. □

Definizione 11 *Due metriche d e ρ su X si dicono **Lipschitz-equivalenti** se l'identità* $\mathrm{id} : (X,d) \longrightarrow (X,\rho)$ *è lipschitziana con inversa lipschitziana.*

Osservazione. Su uno spazio vettoriale due norme topologicamente equivalenti inducono metriche Lipschitz-equivalenti.

Corollario 12 *Due metriche Lipschitz-equivalenti hanno le stesse successioni di Cauchy.*
Due norme topologicamente equivalenti hanno le stesse successioni di Cauchy.
La completezza di uno spazio metrico non muta rispetto a metriche Lipschitz-equivalenti.
La completezza di uno spazio normato non muta rispetto a norme topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Basta osservare che $\mathrm{id} : (X,d) \longrightarrow (X,\rho)$ è biiettiva, lipschitziana con inversa lipschitziana. □

Serie negli spazi normati

In uno spazio normato X possiamo considerare una serie di vettori:

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j$$

la cui successione $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ di ridotte (somme parziali) è data da:

$$s_m = x_0 + x_1 + \cdots + x_m$$

Tale serie si dice **convergente** se la successione delle ridotte ha limite in X.

Definizione 13 *La serie* $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ *è **normalmente** (= **totalmente**) convergente se la serie numerica delle norme dei suoi termini* $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\|$ *è convergente.*

Proposizione 14 *Uno spazio normato è di Banach se e solo se ogni serie di vettori che sia normalmente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Necessità. Supponiamo che X sia di Banach e supponiamo che $\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\| < +\infty$. Allora la successione di termine generale $t_m = \sum_{j=0}^{m} \|x_j\|$ è convergente e pertanto di Cauchy.

Basta dimostrare che la successione di termine generale $s_m = \sum_{j=0}^{m} x_j$ è di Cauchy. Si ha:

$$\|s_{m+k} - s_m\| = \| \sum_{j=m+1}^{m+k} x_j\| \leq \sum_{j=m+1}^{m+k} \|x_j\|$$

Fissato $\varepsilon > 0$, l'ultimo termine è $< \varepsilon$ per ogni k positivo se m è abbastanza grande.

Sufficienza. Sia $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy.

Si può trovare una successione di indici $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_j < \cdots$ in modo che:

$$\|x_{\nu_{j+1}} - x_{\nu_j}\| \leq \frac{1}{2^j}$$

Allora la serie telescopica

$$x_{\nu_1} + (x_{\nu_2} - x_{\nu_1}) + (x_{\nu_3} - x_{\nu_2}) + \cdots + \left(x_{\nu_{j+1}} - x_{\nu_j}\right) + \cdots$$

è normalmente convergente e quindi convergente.

La ridotta m-esima di tale serie è $x_{\nu_{m+1}}$, per cui la successione $(x_{\nu_j})_{j\in\mathbb{N}}$ è convergente.

La successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è convergente perché è di Cauchy e ha una sottosuccessione convergente. $\square$

Ricordiamo che una serie numerica $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ è convergente $\iff$ ogni sua serie resto $\sum_{j=m+1}^{\infty} b_j$ è convergente e infinitesima per $m \to \infty$.

Proposizione 15 *Lo spazio normato $B(T, \mathbb{K})$ con la norma della convergenza uniforme $\|\cdot\|_\infty$ è di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ una serie normalmente convergente di funzioni limitate: dobbiamo dimostrare che essa è convergente nella metrica indotta da $\|\cdot\|_\infty$.

Per ogni $t \in T$ si ha $|f_j(t)| \leq \|f_j\|_\infty$, per cui la serie $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(t)$ è assolutamente convergente (criterio del confronto per serie a termini positivi). Consideriamo la somma puntuale:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t)$$

Rimane da dimostrare che:

$$\|f - \sum_{j=0}^{m} f_j\|_\infty$$

è infinitesima per $m \to \infty$. Si ha:

$$|f(t) - \sum_{j=0}^{m} f_j(t)| = |\sum_{j=m+1}^{\infty} f_j(t)| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |f_j(t)| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|f_j\|$$

Poiché l'ultimo termine non dipende da t, passando al $\sup_{t \in T}$ nel primo termine a sinistra:

$$\|f - \sum_{j=0}^{m} f_j\|_\infty \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|f_j\|_\infty$$

Poiché $\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_\infty$ è convergente, il termine di destra è infinitesimo per $m \to \infty$, e quindi anche il termine di sinistra. □

Corollario 16 *Ogni spazio metrico (X, d) si immerge isometricamente in uno spazio metrico completo, precisamente nello spazio di Banach $B(X, \mathbb{R})$.*

Proposizione 17 *Sia X uno spazio topologico.*
Lo spazio vettoriale $C_b(X,\mathbb{K})$ delle funzioni continue e limitate, normato da $\|\cdot\|_\infty$, è di Banach.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $C_b(X,\mathbb{K})$ è chiuso in $B(X,\mathbb{K})$.
Sia f un elemento della chiusura: occorre vedere che f è continua in ogni punto t_0.
Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $f_\varepsilon \in C_b(X,\mathbb{K})$ tale che $\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$.
Per tale f_ε esiste un intorno V di t_0 tale che $|f_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t_0)| < \varepsilon$ per ogni $t \in V$. Si ha allora, per ogni $t \in V$:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq |f(t) - f_\varepsilon(t)| + |f_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t_0)| + |f_\varepsilon(t_0) - f(t_0)| \leq \\ &\leq \|f - f_\varepsilon\|_\infty + |f_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t_0)| + \|f_\varepsilon - f\|_\infty < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà di ε, si ha la continuità di f in t_0. $\square$

Proposizione 18 *Siano X e Y spazi normati.*
Se Y è di Banach, allora $L(X,Y)$ è di Banach.

(Dimostrazione omessa)

Proposizione 19 *Per ogni $p \geq 1$ si consideri lo spazio $l^p(\mathbb{N}) = l^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$ costituito dalle successioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tali che $\sum_{j\in\mathbb{N}} |f(j)|^p < \infty$. Su tale spazio la posizione*

$$\|f\|_p = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |f(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

definisce una norma (difficile).
Lo spazio $l^p(\mathbb{N})$ è uno spazio normato di Banach.

(Dimostrazione omessa)

$C^0([a,b],\mathbb{K})$ non è di Banach né con $\|\cdot\|_1$ né con $\|\cdot\|_2$.

Ricordiamo che su $\mathbb{K}^n$ la topologia euclidea è indotta da una qualsiasi delle norme equivalenti $|\cdot|$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$.

Lemma 20 *Sia $\mathbb{K}^n$ munito della norma prodotto, cioè:*

$$\|\xi\|_\infty = \max\{|\xi_i| : \ i = 1, \ldots, k\}$$

Se X è uno spazio normato, ogni funzione lineare $T : \mathbb{K}^n \to X$ è continua.

Dimostrazione. Sia $e_1, \ldots, e_n$ la base standard di $\mathbb{K}^n$ e sia $T(e_k) = a_k \in X$. Si ha:

$$T(\xi) = T(\sum \xi_k e_k) = \sum \xi_k T(e_k) = \sum \xi_k a_k$$

Si ha allora:

$$\|T(\xi)\| = \|\sum \xi_k a_k\| \leq \sum |\xi_k| \, \|a_k\| \leq \sum \|\xi\|_\infty \, \|a_k\| = \left(\sum \|a_k\|\right) \|\xi\|_\infty$$

Quindi T è continua con costante di Lipschitz $l = \sum \|a_k\|$. □

Sia S_X la sfera unitaria di $X = \mathbb{K}^n$ nella norma euclidea.
S_X è un insieme limitato (ovvio);
è un insieme chiuso: è lo zero-insieme della funzione continua $|x| - 1$.
Dimostreremo più avanti che ogni funzione continua a valori reali definita su un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{K}^n$ ammette minimo e massimo.
Si consideri un operatore lineare iniettivo $T : X \to Y$, ove Y è normato.
Poiché T è continuo, la funzione $u \to \|Tu\|$ ha valore minimo per $u \in S_X$.
Detto $\alpha = \|Tu_0\|$ tale minimo, si ha $\alpha > 0$ perché T è iniettivo. Pertanto l'inverso di T, definito su $T(X)$, è continuo.

Teorema 21

- *Sia E spazio normato di dimensione finita n.*
  Ogni isomorfismo lineare di $\mathbb{K}^n$ su E è un omeomorfismo (lipschitziano con inverso lipschitziano).

- *Su uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono topologicamente equivalenti.*

- *Un sottospazio di dimensione finita di uno spazio normato è chiuso nello spazio stesso.*