

SPAZI METRICI

Nel piano $\mathbb{R}^2$ o nello spazio $\mathbb{R}^3$ la distanza fra due punti è la lunghezza, o *norma euclidea*, del vettore differenza di questi due punti.

Se $p = (x, y, z)$ è un vettore in coordinate ortonormali, la sua lunghezza è:

$$|p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è:

$$d(p_1, p_2) = |p_2 - p_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Questa distanza si chiama *metrica euclidea* o *pitagorica*, per distinguerla da altre metriche.

Definizione 1 *Uno spazio metrico è un insieme X fornito di una funzione distanza (=metrica)*

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$$

che verifica le seguenti tre condizioni (per ogni coppia di punti):

$$(D_1) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ e inoltre } d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(D_2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(D_3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Uno spazio metrico X con metrica d si indica con il simbolo (X, d) .

Esercizio. Verificare che:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

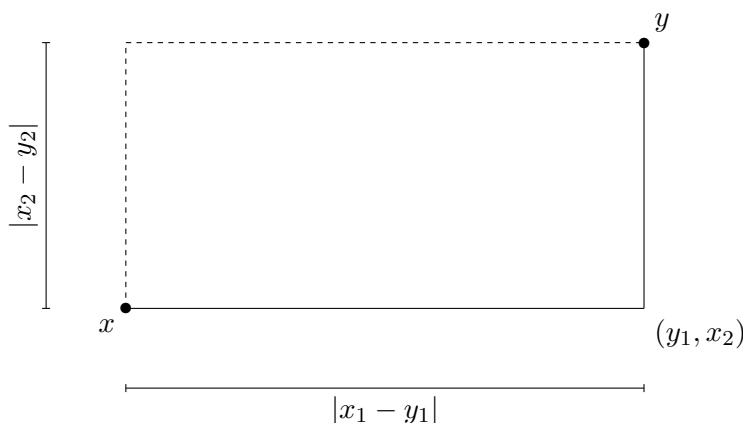
Esempi. $\mathbb{R}^n$ con la distanza euclidea:

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= |y - x| = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}, \\ &\text{ove } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ e } y = (y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

È difficile verificare la disuguaglianza triangolare.

$\mathbb{R}^2$ con la metrica del reticolato (o di Manhattan):

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad \text{ove } x = (x_1, x_2) \text{ e } y = (y_1, y_2).$$



$\mathbb{R}^2$ con la metrica del sup:

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad \text{ove...}$$

Distanza geodetica in $\mathbb{S}^2$, sfera dei versori di $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{S}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1\}$$

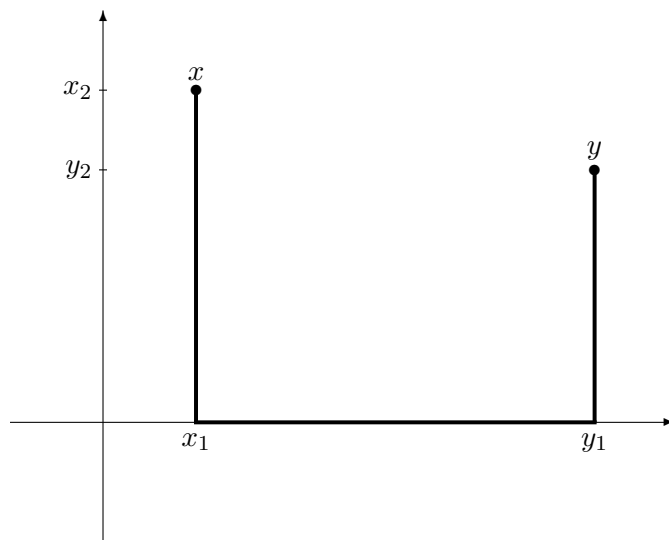
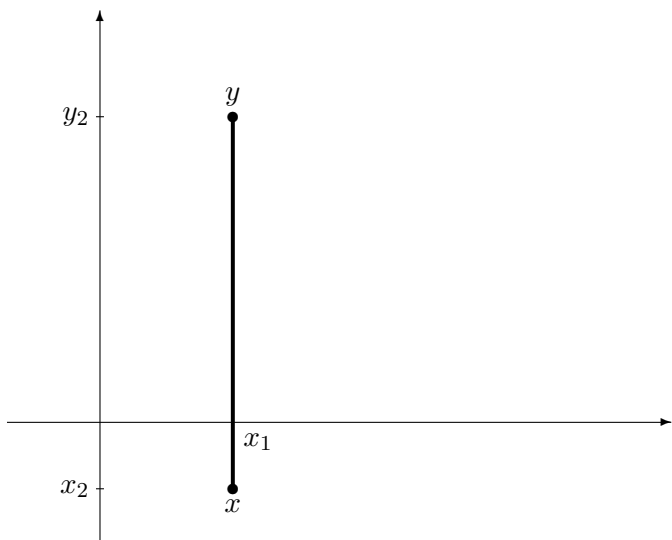
$$d(u, v) = \arccos(u \cdot v)$$

Si tratta della lunghezza del minore fra i due archi di cerchio massimo di estremi u e v .

$\mathbb{R}^2$ con la distanza delle valli.

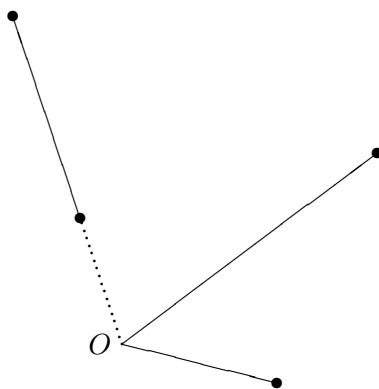
Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$:

$$d(x, y) = \begin{cases} |y_2 - x_2| & \text{se } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{se } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$



$\mathbb{R}^2$ con la metrica del riccio:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono proporzionali,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Metrica discreta su un insieme E .

Si fissa una costante $\alpha > 0$ e si definisce per $x \neq y$:

$$d(x, y) = \text{un qualsiasi numero} \geq \alpha \text{ in modo che valga } (D_3)$$

Ad esempio: $d(x, y) = \alpha \quad \forall x \neq y$.

Siano E un insieme e $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva.

La posizione

$$d_g(x, y) = |g(x) - g(y)|$$

definisce una metrica su E .

Definizione 2 Se $S \subseteq X$ e d è una metrica su X , allora $d_S = d|_{S \times S}$ è una metrica su S , detta *metrica indotta*, e (S, d_S) si dice *sottospazio metrico di (X, d)* .

Scriveremo sempre (S, d) .

Esempi.

- La metrica indotta su $\mathbb{Z}^2$ dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$ è discreta, $\alpha = 1$.
- La metrica indotta su $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ dalla metrica del riccio di $\mathbb{R}^2$ è discreta, $\alpha = 2$.

Definizione 3 Dati uno spazio metrico (X, d) , un punto $a \in X$ e un numero reale $r > 0$, si definiscono:

- *palla aperta di centro a e raggio r :*

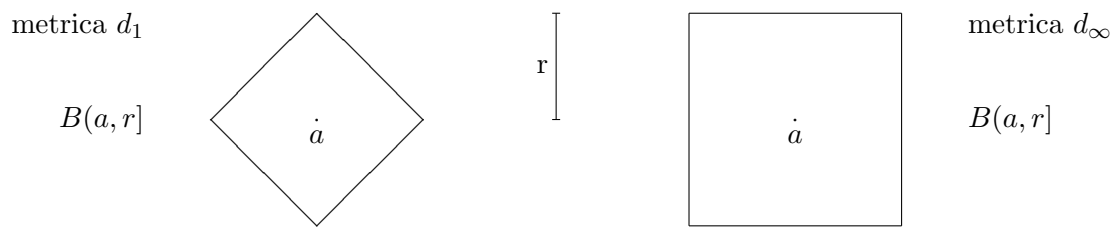
$$B(a, r[= \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

- *palla chiusa di centro a e raggio r :*

$$B(a, r] = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$$

Se necessario si usa B_d in luogo di B .

Esercizio. Disegnare le palle in $\mathbb{R}^2$ con le metriche d_2 , d_1 e d_∞ .



Esempio. Sia $p \geq 1$ un numero reale. La funzione

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$

definisce una metrica su $\mathbb{R}^2$ (difficile!).

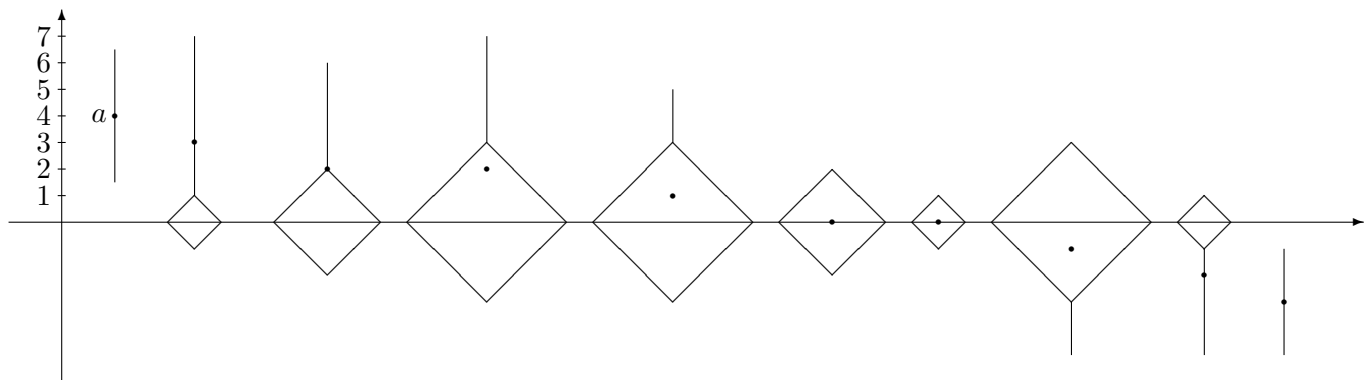
Vedere nella dispensa la forma delle palle.

Domande. Chi sono le palle (aperte e chiuse) nella metrica discreta?

Chi sono le palle nella metrica geodetica della sfera? Quali sono le palle (aperte e chiuse) di raggio π ?

Come sono fatte le palle nella metrica del riccio?

E nella metrica delle valli?



Spazi di funzioni.

Sia T un insieme e $\mathbb{K}$ indichi il corpo reale o il corpo complesso.

Con il simbolo $\mathbb{K}^T$ indichiamo l'insieme delle funzioni da T a $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}^T$ diventa uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni definite puntualmente:

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\lambda f)(t) = \lambda(f(t))$$

Un sottospazio (vettoriale) interessante è:

$$B(T, \mathbb{K}) = l^\infty(T, \mathbb{K})$$

insieme delle funzioni limitate da T a $\mathbb{K}$.

Su di esso è definita la **metrica della convergenza uniforme**:

$$d_\infty(f, g) = \|g - f\|_\infty = \sup\{|g(t) - f(t)| : t \in T\}$$

Verifica della disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} |f(t) - h(t)| &\leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \leq \\ &\leq \|f - g\|_\infty + \|g - h\|_\infty \quad (*) \end{aligned}$$

Siccome la disuguaglianza è vera per ogni $t \in T$, il termine

$$\sup_{t \in T} |f(t) - h(t)| = \|f - h\|_\infty$$

è maggiorato da $(*)$.

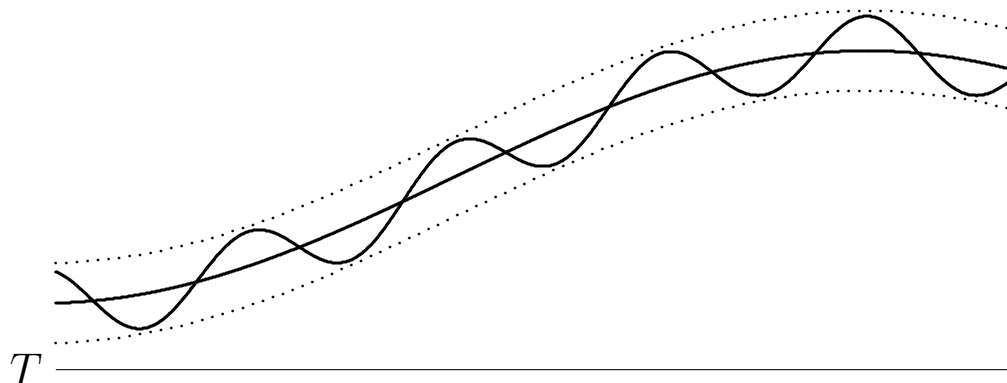
Esercizio. Siano $f \in B(T, \mathbb{R})$ con la metrica d_∞ e $r > 0$ in $\mathbb{R}$.

Allora:

$$B(f, r) \subseteq \{g \in B(T, \mathbb{R}) : f(t) - r < g(t) < f(t) + r \ \forall t \in T\} \subset B(f, r)$$

Rendersi conto che la seconda inclusione è sempre stretta,

mentre la prima è un'uguaglianza $\iff T$ è finito.



Consideriamo lo spazio $X = C([a, b], \mathbb{K})$ delle funzioni continue su $[a, b]$ con valori in $\mathbb{K}$.

Si ha $X \subseteq B([a, b], \mathbb{K})$ per il teorema di Weierstrass.

Quindi X può essere munito della metrica d_∞ .

Esercizio. Siano f e g in $C([0, 4], \mathbb{R})$ così definite:

$$f(x) = x \log x \text{ se } x > 0, f(0)=0, \quad g(x) = x$$

Calcolare $d_\infty(f, g)$.

Un'altra distanza su $X = C([a, b], \mathbb{K})$ è quella della *media di ordine 1*:

$$d_1(f, g) = \|g - f\|_1 = \int_{[a,b]} |g(t) - f(t)| dt$$

Un'altra è quella della *media di ordine 2*:

$$d_2(f, g) = \|g - f\|_2 = \left(\int_{[a,b]} |g(t) - f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

o in generale della *media di ordine p* , con $p \geq 1$ reale:

$$d_p(f, g) = \|g - f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |g(t) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Esercizio. Calcolare $d_1(f, g)$ e $d_2(f, g)$, dove f e g sono le funzioni dell'esercizio precedente.

Spazi vettoriali normati

Definizione 4 Se X è un K -spazio vettoriale, una norma su X è una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty[$ tale che:

$$(N_1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ per ogni } x \in X; \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{K} \text{ e ogni } x \in X.$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ per ogni } x, y \in X.$$

Un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale con una norma assegnata si chiama *spazio normato*.
Uno spazio normato diventa uno spazio metrico assegnando come distanza:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

La verifica delle proprietà (D_i) si fa usando le (N_i) .

(D_1) e (D_2) sono immediate. Verifichiamo la (D_3) :

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \stackrel{N_3}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$

Non ogni metrica su uno spazio vettoriale è indotta da una norma (v. metrica del riccio). Sussiste anzi il seguente fatto:

Se la metrica d è indotta da una norma:

(1) d è invariante per traslazioni, cioè:

$$d(x + a, y + a) = d(x, y), \quad \forall x, y, a \in X$$

(2) d è assolutamente omogenea, cioè:

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X$$

Viceversa, se una metrica d soddisfa (1) e (2), allora la posizione

$$\|x\| = d(x, 0)$$

definisce una norma su X che ha d come distanza associata.

Definizione 5 Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato, si chiama **palla unitaria** (chiusa) la palla chiusa di centro il vettore nullo e di raggio 1:

$$B_X = B(0, 1] = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

La **sfera unitaria** è l'insieme dei versori:

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

Esercizio. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato, $a \in X$ e $r > 0$. Dimostrare che $B(a, r] = a + rB_X$.

Le distanze d_p , con $p \geq 1$, e d_∞ definite precedentemente su $\mathbb{R}^2$ (oppure su $\mathbb{R}^n$ o su $\mathbb{C}^n$), sono indotte dalle seguenti norme:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1, \dots, n\}, \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

La verifica della subaddittività per $\|\cdot\|_p$ per $p > 1$ è difficile. Comunque per $p = 2$, se

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \quad \text{è l'usuale prodotto scalare di } \mathbb{K}^n,$$

allora $\|x\|_2 = (x|x)^{\frac{1}{2}}$ è una norma indotta da un prodotto scalare e quindi soddisfa (N_3) (ricordare le disuguaglianze di Schwarz e di Minkowski).

Su $B(T, \mathbb{K}) = l^\infty(T, \mathbb{K})$ la distanza d_∞ è indotta dalla norma:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in T\}$$

Sottospazi vettoriali interessanti di $B([a, b], \mathbb{K})$ sono:

$$C([a, b], \mathbb{K}), \quad C^1([a, b], \mathbb{K})$$

Su di essi si può ancora considerare la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Su $X = C([a, b], \mathbb{K})$ la metrica della media di ordine p è indotta dalla norma:

$$\|f\|_p = \left(\int_{[a, b]} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Esercizio. Sia $l^1 = l^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'insieme delle successioni a valori in $\mathbb{K}$ che formano serie assolutamente convergenti; cioè una successione $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ sta in l^1 se e solo se:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| < +\infty.$$

Dimostrare che l^1 è spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_1$ è una norma su di esso.

Definizione 6 Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici.

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice un'isometria se conserva le distanze, cioè se:

$$\rho(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

Ogni isometria è iniettiva;

l'inversa di un'isometria (da $f(X) \rightarrow X$) è un'isometria;

la composizione di due isometrie è un'isometria.

Due spazi metrici si dicono isometrici se fra essi esiste un'isometria biiettiva.

Proposizione 7 Ogni spazio metrico (X, d) è isometrico a un sottospazio metrico di uno spazio vettoriale normato.

Dimostrazione. Sia $Y = B(X, \mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_\infty$ e sia $a \in X$ fissato.

Per ogni $x \in X$ sia $\varphi_x : X \rightarrow \mathbb{R}$ così definito:

$$\varphi_x(t) = d(t, x) - d(t, a), \quad \forall t \in X$$

$\varphi_x \in Y$ (cioè è limitata) perché:

$$|\varphi_x(t)| = |d(t, x) - d(t, a)| \leq d(x, a)$$

Inoltre la mappa $x \rightarrow \varphi_x$ è un'isometria da (X, d) a (Y, d_∞) . $\square$

Attenzione: per questo, con abuso di notazione, può essere comodo indicare con $\|x - y\|$ la distanza, anche in uno spazio metrico non normato (in generale $x - y$ non esiste in X).

Definizione 8 Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici.

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **lipschitziana** se esiste una costante $l \geq 0$ tale che:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq l \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

l è detta costante di Lipschitz.

Esercizio. L'estremo inferiore delle costanti di Lipschitz per una funzione lipschitziana è ancora una costante di Lipschitz.

Essa si chiama **la** costante di Lipschitz.

Su $\mathbb{R}$ si considera sempre la metrica $|t - s|$.

Esercizi.

- Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

Dimostrare che f è lipschitziana $\iff f'$ è limitata.

- Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato.

Allora $x \rightarrow \|x\|$ è una funzione lipschitziana da X in $[0, +\infty[$

(segue da $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$).

Definizione 9 Siano (X, d) uno spazio metrico e A un sottoinsieme non vuoto di X .

Si consideri la funzione $d(\cdot, A) : X \rightarrow [0, +\infty[$, detta **distanza da A** , definita ponendo per ogni $x \in X$:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Proposizione 10 Si ha:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$.

Poiché $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \quad \forall a \in A$, passando all' $\inf_{a \in A}$ a destra, si ottiene quanto voluto. $\square$

Definizione 11 Il diametro di un sottoinsieme $A \neq \emptyset$ di uno spazio metrico (X, d) è:

$$\text{diam } A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}, \quad \text{dove il sup può essere anche } +\infty$$

Si pone $\text{diam } \emptyset = 0$.

Un sottoinsieme si dice limitato se ha diametro finito (cioè $\in \mathbb{R}$).

Esercizi.

- Il diametro di una palla di raggio $r > 0$ è $\leq 2r$.
Dare un esempio in cui il diametro è strettamente $< 2r$.
Dimostrare che in uno spazio vettoriale normato tale diametro è esattamente $2r$.
- Un sottoinsieme è limitato $\iff$ è contenuto in una palla.
- Un'unione finita di sottoinsiemi limitati è un sottoinsieme limitato.
- Sia $A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.
Trovare il diametro di A in d_2, d_1, d_∞ .
Sia $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \|x\|_2 = r\}$.
Chi è il diametro di E in d_∞ ? E in d_1 ?

Topologia di uno spazio metrico

La topologia serve per dare nozioni di *vicinanza* e di *convergenza*.

Definizione 12 Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$.

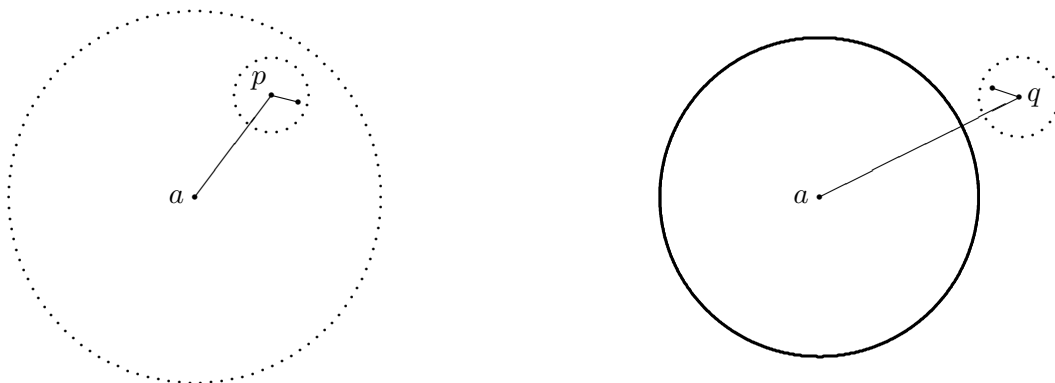
A si dice aperto se è vuoto oppure se è unione di palle aperte.

La topologia dello spazio metrico (X, d) è la famiglia τ_d , o più semplicemente τ , costituita da tutti i sottoinsiemi aperti.

La coppia (X, τ) è detta **spazio topologico metrizzabile**.

Un insieme si dice **chiuso** se il suo complementare è un insieme aperto.

Esercizio. Se $p \in B(a, r[$ e $s \leq r - d(p, a)$, allora $B(p, s[\subseteq B(a, r[$.
Se $q \notin B(a, r]$ e $t \leq d(q, a) - r$, allora $B(q, t[\cap B(a, r] = \emptyset$.
Prima conseguenza: ogni palla chiusa è un insieme chiuso.



Seconda conseguenza dell'esercizio precedente.

Proposizione 13 A è aperto $\iff$ per ogni $p \in A$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che $B(p, \delta[\subseteq A$.

Dimostrazione. Sufficienza: immediata.

Necessità. Sia $p \in A$ con A insieme aperto.

Esiste una palla aperta $B(a, r[$ tale che $p \in B(a, r[\subseteq A$.

Sia $s \leq r - d(p, a)$. Per l'esercizio precedente si ottiene:

$$B(p, s[\subseteq B(a, r[\subseteq A$$

□

Proposizione 14 La topologia τ di uno spazio metrico soddisfa le seguenti proprietà:

(A₁) $\emptyset, X \in \tau$;

(A₂) se $A_\lambda \in \tau$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$$

ogni unione arbitraria di aperti è un aperto.

(A₃) se $A_1, \dots, A_m \in \tau$, allora:

$$A_1 \cap \dots \cap A_m \in \tau$$

ogni intersezione finita di aperti è un aperto.

Dimostrazione. (A_1) ovvia.

(A_2) unione di unioni di palle aperte...

(A_3). Basta dimostrarlo per due insiemi aperti A_1 e A_2 ; useremo la prop. 13. Sia $p \in A_1 \cap A_2$. Esistono allora $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che:

$$B(p, r_1[\subseteq A_1, \quad B(p, r_2[\subseteq A_2$$

Supponiamo $r_1 \leq r_2$. Allora ovviamente $B(p, r_1[\subseteq A_1 \cap A_2$. $\square$

Esercizio. Mostrare con un esempio che un'intersezione arbitraria di insiemi aperti non è in generale un insieme aperto.

Definizione 15 *Un sottoinsieme C di X si dice chiuso se il suo complementare*

$$X \setminus C = \{x \in X : x \notin C\}$$

è un aperto.

Esercizio. I *singoletti* (insiemi del tipo $\{x\}$) sono insiemi chiusi.

Dalla dualità di De Morgan si ottengono le seguenti proprietà dei chiusi:

(C₁) $X, \emptyset$ sono chiusi;

(C₂) se C_λ è chiuso per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ è chiuso;

(C₃) se $C_1, \dots, C_m$ sono chiusi, allora $C_1 \cup \dots \cup C_m$ è chiuso.

Esercizio. Mostrare con un esempio che un'unione arbitraria di insiemi chiusi non è in generale un insieme chiuso.

Definizione 16 *Un sottoinsieme U di X si dice **intorno** di un punto $p \in X$ se esiste un aperto A tale che:*

$$p \in A \subseteq U$$

cioè U deve contenere un insieme aperto che contiene p .

Meditazione:

un insieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto

La famiglia $\mathcal{I}_p$ di tutti gli intorni di p si chiama *filtro degli intorni di p* .

Proprietà di $\mathcal{I}_p$:

(I₁) $\forall U \in \mathcal{I}_p$ si ha $p \in U$;

(I₂) se $U \in \mathcal{I}_p$ e $U \subseteq V \subseteq X$, allora $V \in \mathcal{I}_p$;

(I₃) se $U, V \in \mathcal{I}_p$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}_p$;

(I₄) se $U \in \mathcal{I}_p$ allora esiste $A \subseteq U$ con $p \in A$ e tale che $A \in \mathcal{I}_x$ per ogni $x \in A$.

Definizione 17 Una famiglia $\mathcal{B}_p$ di sottoinsiemi di X si dice **base per il filtro degli intorni di p** se:

i) per ogni $U \in \mathcal{B}_p$ si ha $U \in \mathcal{I}_p$;

ii) per ogni $V \in \mathcal{I}_p$ si ha che esiste $U \in \mathcal{B}_p$ tale che $U \subseteq V$.

Esercizio. Verificare che in uno spazio metrico ciascuna delle seguenti famiglie è base per gli intorni di p :

a) $\{B(p, \delta[: \delta > 0\}$

b) $\{B(p, \delta] : \delta > 0\}$

c) $\{B(p, \frac{1}{n}[: n = 1, 2, \dots\}$

Quando si parla di $\mathbb{R}^n$ si intende con la topologia *usuale* o euclidea, cioè quella indotta dalla metrica euclidea $|x - y|$.

Esercizio.

- In $\mathbb{R}$ la famiglia degli intervalli aperti che contengono un punto p costituisce una base per il filtro degli intorni di p .
- Sia U aperto non vuoto di $\mathbb{R}$.
Dimostrare che U contiene sia numeri razionali sia numeri irrazionali.
Generalizzare il risultato a $\mathbb{R}^n$.

Sia $A \subseteq X$. Si dice **chiusura di A in X** , e si indica con $\overline{A}$ o con $\text{cl}_X(A)$, il seguente insieme:

$$\overline{A} = \bigcap \{C : C \supseteq A, C \text{ chiuso in } X\}$$

È il più piccolo chiuso che contiene A .

Proprietà:

(Cl₁) $\forall A \subseteq X$ si ha $A \subseteq \overline{A}$;

(Cl₂) se $A, B \subseteq X$ allora $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(Cl₃) per ogni $A \subseteq X$ si ha $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Esercizio. Dopo aver osservato che in $\mathbb{R}$ ogni intervallo aperto non vuoto contiene numeri razionali,

dedurre che $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

È vero che $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$?

Esercizio. Dimostrare che $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,
e che l'inclusione può essere stretta.

Proposizione 18 Siano $p \in X$ e $A \subseteq X$. Allora:

$p \in \overline{A}$ se e solo se per ogni intorno U di p si ha $U \cap A \neq \emptyset$.

Importante Siano d la metrica che induce la topologia di X e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora:

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

Si dice **interno di A** , indicato con $\overset{\circ}{A}$ oppure $\text{int}_X(A)$:

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U : U \subseteq A, U \text{ aperto in } X\}$$

È il massimo sottoinsieme aperto contenuto in A .

Se $p \in \overset{\circ}{A}$, allora p si dice interno ad A .

Fatto: $X \setminus \overline{A} = \text{int}(X \setminus A)$.

Un punto p si dice **di frontiera** per A se p non è interno né ad A né a $X \setminus A$, cioè se ogni intorno di p contiene punti di A e punti di $X \setminus A$.

Si chiama **frontiera di A** e si indica con $\text{fr}_X(A)$ o ∂A l'insieme dei punti di frontiera per A .

Fatti:

- $\text{fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \text{fr}(X \setminus A)$.
- $\overline{A} = A \cup \text{fr } A$.
- $p \in \text{fr } A \iff \forall U \in \mathcal{I}_p$ si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
- $\text{fr } A$ è un insieme chiuso.
- Un insieme è chiuso se e solo se contiene la propria frontiera.

Definizione 19 *Un punto $p \in X$ si dice **punto di accumulazione** per un sottoinsieme A di X se ogni intorno U di p contiene punti di A diversi da p .*

*Un punto $p \in A$ si dice **isolato** in A se non è di accumulazione per A .*

Fatti:

- L'insieme dei punti di accumulazione per A si chiama **derivato** di A e si indica con A' . Si ha:

$$\overline{A} = A \cup A'$$

- Il punto p è di accumulazione per A se e solo se ogni intorno di p contiene infiniti punti di A .

Esercizio. Trovare la chiusura, l'interno, la frontiera, il derivato e l'insieme dei punti isolati dei seguenti insiemi:

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A = \mathbb{Q} \cap]0, 1[\cup \{2\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A =]-\infty, 0[\cup \{1\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad A = \mathbb{Q}^2 \cap ([0, 1] \times [0, 1])$$

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A = \{m + \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$$

$$A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ con la topologia della metrica del riccio}$$

Definizione 20 Un sottoinsieme $D \subseteq X$ si dice **denso** in X se una delle seguenti condizioni equivalenti è soddisfatta:

- 1) $\overline{D} = X$.
- 2) Ogni aperto non vuoto contiene punti di D .

Ad esempio, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono entrambi densi in $\mathbb{R}$.

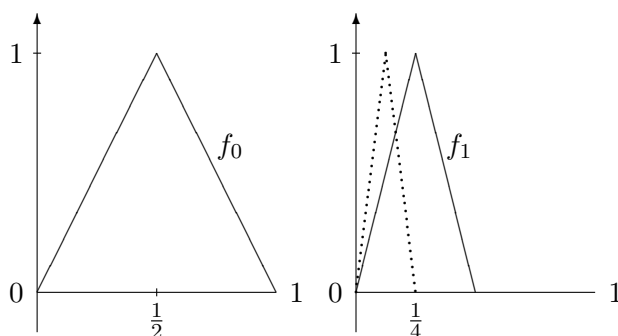
Esercizio. L'intersezione di due aperti densi è aperto e denso.

Definizione 21 Sia $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di X e sia $p \in X$. Si dice che $\lim x_j = p$ se per ogni intorno U di p esiste $\bar{j} \in \mathbb{N}$ tale che $x_j \in U$ per ogni $j \geq \bar{j}$

cioè se la successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sta definitivamente in ogni intorno di p .

Osservazione. In $B(X, \mathbb{R})$ con la norma della convergenza uniforme si consideri una successione $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ di funzioni.

Se $\lim f_j = f \in B(X, \mathbb{R})$, allora per ogni $x \in X$ si ha $\lim f_j(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Il viceversa non è vero.



Morale:

la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, ma non viceversa.

Teorema 22 Sia (X, τ) spazio metrizzabile e siano $p \in X$ e $A \subseteq X$.

Allora:

- $p \in \overline{A} \iff$ esiste una successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ con $x_j \in A \forall j$ tale che $\lim x_j = p$.
- $p \in A' \iff$ esiste una successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ con $x_j \in A \setminus \{p\} \forall j$ tale che $\lim x_j = p$.

In questo caso la successione si può prendere iniettiva.