SPAZI LINEARMENTE ORDINATI

Sia $(X, <)$ un insieme linearmente ordinato con almeno due punti.
Una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di X tale che $A \cup B = X$ e se $a \in A$ e $b \in B$ allora $a < b$, si chiama un **taglio** di X. A è detta la **sezione inferiore** del taglio e B la **sezione superiore**. Per ogni taglio vale esattamente una delle seguenti quattro condizioni:

(1) la sezione inferiore ha massimo e la sezione superiore ha minimo;

(2) la sezione inferiore ha massimo e la sezione superiore non ha minimo;

(3) la sezione inferiore non ha massimo e la sezione superiore ha minimo;

(4) la sezione inferiore non ha massimo e la sezione superiore non ha minimo.

Se è soddisfatta la $\boxed{1}$, diciamo che il taglio è un **salto**: si osservi che ogni salto è individuato da una coppia di punti consecutivi (nel senso che non ci sono altri punti compresi fra essi). Se vale la $\boxed{4}$, diciamo che il taglio è una **lacuna**.
Se X è privo di salti si dice **densamente ordinato**. Se X è privo di lacune si dice **completo per l'ordine**.
La seguente proposizione caratterizza gli insiemi completi.

Proposizione 1 *Se X è un insieme linearmente ordinato le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) X non ha lacune.

ii) ogni sottoinsieme non vuoto superiormente limitato ha estremo superiore.

iii) ogni sottoinsieme non vuoto inferiormente limitato ha estremo inferiore.

Esempi.

1. La retta razionale, cioè l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali munito dell'ordine usuale, è un insieme densamente ordinato ma non completo. Le lacune sono in corrispondenza biunivoca con gli irrazionali della retta reale.

2. La **retta lunga** è il piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munito dell'ordine **lessicografico**, che è così definito: se $p = (x_1, y_1)$ e $q = (x_2, y_2)$, poniamo $p < q$ se $x_1 < x_2$ oppure $x_1 = x_2$ e $y_1 < y_2$. È ancora un insieme densamente ordinato, e non completo. Le sezioni inferiori delle lacune sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $A = \{(x, y) :\ x < x_0\}$ oppure del tipo $A = \{(x, y) :\ x \leq x_0\}$, per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. L'*intervallo unitario* $I = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \leq x \leq 1\}$ è completo, densamente ordinato e ha massimo e minimo.

4. Ł è il quadrato $I \times I$ con l'ordine lessicografico. È densamente ordinato ed ha massimo e minimo. Dimostrare che esso è anche completo.

5. È facile costruire esempi con salti: ad esempio, $\mathbb{Z}$ oppure l'unione di una famiglia di intervalli chiusi di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti.

Per ogni insieme linearmente ordinato i simboli $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, \to [$,... hanno il significato che ci si aspetta.

Definizione 2 *Un sottoinsieme E di un insieme linearmente ordinato X si dice **limitato per l'ordine** se esistono $a, b \in X$ con $a < b$ tali che $E \subseteq [a, b]$.*

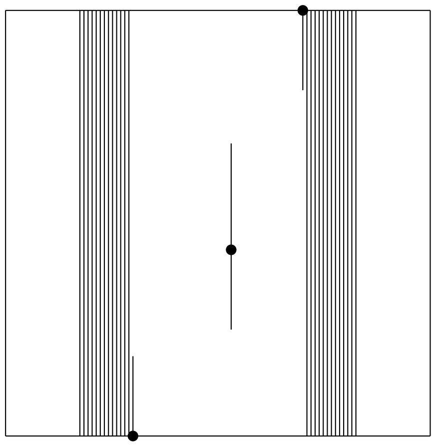
Topologia dell'ordine

Siano a, b punti di X, con $a < b$. Oltre a X stesso, diremo **intervalli aperti** di X gli insiemi del tipo:

$$\begin{aligned}]a,b[\;&=\; \{x :\; a < x < b\} \\ ]\leftarrow, a[\;&=\; \{x :\; x < a\} \\ ]a, \rightarrow [\;&=\; \{x :\; x > a\} \end{aligned}$$

Un sottoinsieme E di X si dice **aperto** nella topologia dell'ordine se è un'unione di intervalli aperti (cioè per ogni $x \in E$ esiste un intervallo aperto contenente x e contenuto in E). È facile verificare che un'unione arbitraria di aperti è un aperto e che un'intersezione finita di aperti è ancora un aperto. Inoltre gli intervalli aperti contenenti un punto formano una base per il filtro degli intorni di quel punto.

Esempio. La topologia del quadrato lessicografico Ł.

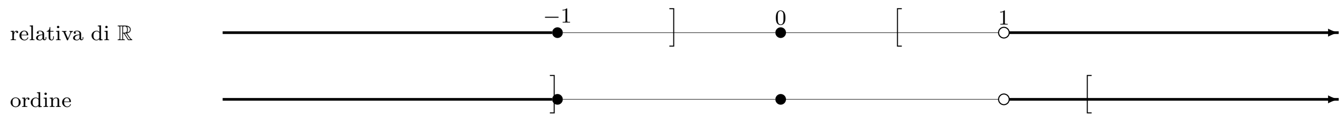


Esercizio. In uno spazio topologico linearmente ordinato gli intervalli del tipo $[a,b]$, $]\leftarrow, a]$, $[a, \rightarrow [$ sono chiusi.
Quando è vero che tali intervalli chiusi sono anche insiemi aperti?

Esercizio. Sia X uno spazio topologico linearmente ordinato e sia $A \subseteq X$.
Si supponga che A ammetta estremo superiore $s \in X$.
Se A è chiuso, allora $s \in A$.

Se $Y \subseteq X$, la topologia relativa su Y è generata dall'intersezione con Y degli intervalli aperti con estremi in X. In genere essa è **più fine** della topologia dell'ordine di Y, perché quest'ultima è generata dagli intervalli **con estremi in $\boldsymbol{Y}$**.

Esempio. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}$, $Y =]\leftarrow, -1] \cup \{0\} \cup]1, \rightarrow[$.



Nella topologia relativa il punto 0 è **isolato** perché l'intervallo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ interseca Y solo in 0.
Nella topologia dell'ordine il punto 0 è di accumulazione per $]1, \rightarrow[$ perché ogni intervallo aperto contenente 0 e con estremi in Y deve avere secondo estremo maggiore di 1.

Osservazione. Poiché le topologie compatte sono minimali, se Y è un sottospazio compatto di uno spazio ordinato X, la topologia relativa su Y coincide con la topologia dell'ordine indotto.

Il seguente teorema è una caratterizzazione della compattezza negli spazi linearmente ordinati.

Teorema 3 *Sia X uno spazio linearmente ordinato. Sono equivalenti:*

i) X è compatto.

ii) X ha massimo e minimo ed è privo di lacune.

iii) ogni sottoinsieme di X ha estremo superiore.

Dimostrazione. *ii* $\iff$ *iii* Conseguenza immediata della prop. 1, tenendo presente che l'estremo superiore dell'insieme vuoto è il minimo.

i ⇒ *ii*. La famiglia $\mathcal{F} = \{[x, \rightarrow [: \ x \in X\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita e pertanto ha intersezione non vuota. Ma, se $y \in \cap\mathcal{F}$, si deve avere $y \geq x$ per ogni x, e quindi X ha massimo y. Analogamente, con le semirette decrescenti, si prova che X ha minimo. Sia ora (A, B) un taglio, con B privo di minimo: dobbiamo dimostrare che A ha massimo. Essendo B privo di minimo, B è un sottoinsieme aperto (è l'unione delle semirette aperte crescenti con estremo in B). Pertanto A è chiuso e quindi compatto. Di conseguenza A ha massimo.
iii ⇒ *i*. Sia: $a = \min X$, $b = \max X$.
Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X;
per ogni $x \in X$, scegliamo $U_x \in \mathcal{U}$ tale che $x \in U_x$.
Consideriamo l'insieme S costituito dai punti $\xi \in X$ tali che:

l'intervallo $[a, \xi]$ è contenuto in un'unione finita di elementi di $\mathcal{U}$.

S è non vuoto perché contiene a.
Sia $c = \sup S$.
Osserviamo che $c > a$: poiché per qualche $y > a$ è $U_a \supseteq [a, y[$, si ha $[a, y] \subseteq U_a \cup U_y$.
Dimostriamo che $c \in S$. Esiste $x < c$ tale che $]x, c] \subseteq U_c$. Esiste $s \in S$ tale che $x < s$.
Allora $[a, s]$ è contenuto in un'unione finita di elementi di $\mathcal{U}$, diciamo:

$$U_1, \ldots, U_n$$

Si ha allora $[a, c] \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup U_c$, dunque $c \in S$.
Infine dimostriamo che non può essere $c < b$.
Se ciò fosse, esisterebbe $y > c$ tale che $[c, y[\subseteq U_c$. Poiché $[c, y] \subseteq U_c \cup U_y$, si avrebbe che $[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$ sarebbe contenuto in un'unione finita di elementi di $\mathcal{U}$.
Dunque y apparterrebbe a S, contraddizione. □

Osservazione. Sia X uno spazio linearmente ordinato completo per l'ordine. I sottospazi compatti di X sono esattamente i sottoinsiemi chiusi e limitati.