SPAZI TOPOLOGICI

La nozione di spazio topologico è più generale di quella di spazio metrizzabile.

Definizione 1 *Uno* ***spazio topologico*** (X, τ) *è una coppia costituita da un insieme* X *e da una famiglia* $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ *di sottoinsiemi di* X *soddisfacente agli assiomi* (A_1), (A_2), (A_3).
τ *è detta topologia di* X*;*
i suoi elementi sono gli aperti di X*.*

Esempi.

- Se (X, d) è uno spazio metrico, la famiglia τ costituita dai sottoinsiemi che sono unione di palle aperte forma la topologia indotta dalla metrica d.
- Su ogni insieme X, la famiglia $\tau = \mathcal{P}(X)$ forma una topologia detta **topologia discreta**.
  Essa è indotta dalla metrica discreta;
  in essa i singoletti sono insiemi aperti.
- La famiglia $\tau = \{\emptyset, X\}$ forma una topologia detta **topologia banale**.
- Su $\mathbb{R}$ la famiglia $\tau_\iota = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[: \ a \in \mathbb{R}\}$ forma una topologia detta **topologia inferiore** di $\mathbb{R}$.
  (analogamente si definisce la topologia superiore).

I concetti di chiuso, intorno, chiusura, interno,... si danno come negli spazi metrizzabili, e sussistono le stesse proprietà.
Attenzione:

> non è più detto che i singoletti e gli insiemi finiti siano chiusi;
> non è più detto che se p è un punto di accumulazione per un sottoinsieme A, allora ogni intorno di p contenga infiniti punti di A.

Esempio. Trovare la chiusura di un insieme finito nella topologia inferiore.

Proposizione 2 *In uno spazio metrizzabile* (X, d) *punti distinti hanno intorni disgiunti.*

Dimostrazione. Se $p \neq q$, sia $r < \frac{1}{2}d(p, q)$:
le palle $B(p, r[$ e $B(q, r[$ sono intorni disgiunti di p e q. $\square$

Negli spazi topologici si può aggiungere l'assioma di separazione di Hausdorff:

Definizione 3 *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice di Hausdorff, o* T_2 *o separato, se, comunque presi due punti distinti* $x_1 \neq x_2$*, esistono* U_1 *intorno di* x_1 *e* U_2 *intorno di* x_2 *tali che* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Esercizio.

- In uno spazio topologico di Hausdorff gli insiemi finiti sono chiusi.
- In uno spazio topologico di Hausdorff $p \in A' \iff$ ogni intorno di p contiene infiniti punti di A.
- Uno spazio topologico è di Hausdorff $\iff$ ogni singoletto $\{p\}$ è intersezione di intorni chiusi di p.
- Su un insieme X considerare la topologia cofinita τ_{cof}, i cui aperti sono gli insiemi che hanno complementare finito:
  se X è infinito, τ_{cof} non è mai di Hausdorff;
  se X è finito, τ_{cof} coincide con la topologia discreta.

Un insieme si dice **numerabile** se si può mettere in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.
$\mathbb{Q}$ è numerabile; $\mathbb{R}$ non è numerabile.
X è infinito numerabile $\iff$ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$,
dove $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione iniettiva (e suriettiva) di punti di X.

Osservazioni.

- Sia $A \subseteq B$ con B infinito;
poiché $\operatorname{card} B = \max\{\operatorname{card} A, \operatorname{card}(B \setminus A)\}$, se $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ allora $\operatorname{card}(B \setminus A) = \operatorname{card} B$.

- Sia $\{B_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di insiemi numerabili.
Poiché ogni $B_j \setminus \bigcup\limits_{k<j} B_k$ è equipotente a un sottoinsieme N_j di $\mathbb{N}$, allora $\bigcup\limits_j B_j$ si immerge in $\bigcup\limits_j (N_j \times \{j\}) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Quindi l'unione numerabile di numerabili è numerabile.

Esempio di spazio non metrizzabile.
Siano S un insieme non numerabile e p un punto fissato di S.
τ è così costituita:

> tutti i sottoinsiemi di $S \setminus \{p\}$ sono aperti;
> se $p \in A \subseteq S$, allora A è aperto $\iff$ $S \setminus A$ è numerabile.

È facile verificare che τ è una topologia T_2.
Se $\{A_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di intorni di p, allora

$$S \setminus \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (S \setminus A_j)$$

è numerabile (unione numerabile di numerabili);
quindi $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ è infinito più che numerabile.
Pertanto la topologia non può essere indotta da una metrica perché p non può avere una base numerabile di intorni (come sarebbe la famiglia delle palle di raggio $\frac{1}{n}$).

Definizione 4 *Si chiama **base** per una topologia τ un insieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tale che ogni elemento di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$, cioè:*

> *per ogni aperto $A \in \tau$ e per ogni $x \in A$*
> *esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U \subseteq A$.*

Esempi.

- Se (X, τ) è metrizzabile dalla metrica d, allora le palle aperte (di raggio $\frac{1}{n}$) formano una base.
- I singoletti formano una base per la topologia discreta.
- Gli intervalli aperti (di estremi razionali) formano una base per la topologia di $\mathbb{R}$.

Importante:

> se $\mathcal{B}$ è una base per una topologia τ su X, allora per ogni $x \in X$ l'insieme
> $$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : \ x \in B\}$$
> è base per gli intorni di x nella topologia τ.

Proposizione 5 *La famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una base per una topologia se e solo se entrambe le seguenti condizioni sono soddisfatte:*

1) per ogni $x \in X$ esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U$;

*2) per ogni $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ e per ogni $x \in U_1 \cap U_2$
esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.*

Definizione 6 *Uno spazio si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme denso numerabile.*

Esercizio.

- Dimostrare che $\mathbb{R}$ ha una base numerabile per gli aperti.
- Dimostrare che uno spazio topologico con base numerabile è separabile.
- Dimostrare che uno spazio metrizzabile separabile ammette una base numerabile per gli aperti.
  Traccia:
  sia $D = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ un insieme denso numerabile;
  considerare la famiglia $\mathcal{B} = \{B(x_n, \frac{1}{k}[: \ n, k \in \mathbb{N}, \ k \geq 1\}$.

La topologia di Sorgenfrey sulla retta

È definita dalla base:

$$\mathcal{B} = \{[a, b[:\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

Verificare che $\mathcal{B}$ è effettivamente una base
e che la topologia generata è di Hausdorff.
Osservare che ogni punto ha una base numerabile di intorni.
Dimostrare che tale topologia è separabile ($\mathbb{Q}$ è denso).
Dimostrare (non immediato) che ogni base per la topologia ha almeno la cardinalità del continuo e che esiste una base con tale cardinalità;
dedurre che la retta di Sorgenfrey non è metrizzabile.

Definizione 7 *Se (X,τ) è spazio topologico e $S \subseteq X$, la topologia indotta da τ su S è la topologia:*

$$\tau_S = \{A \cap S : \ A \in \tau\}$$

S con la topologia τ_S è detto ***sottospazio topologico*** *di X.*

Osservare che gli aperti o i chiusi in S non sono in generale aperti o chiusi in X.

Esercizi importanti.

- Dimostrare che se S è aperto (chiuso) in X allora ogni aperto (chiuso) di S è aperto (chiuso) in X.
- Sia (X, d) spazio metrico con topologia $\tau = \tau_d$ e $S \subseteq X$.
  Allora la topologia della metrica indotta d_S coincide con la topologia indotta τ_S
  (la traccia di ogni palla è unione di palle con centri in S).
- Siano $D \subseteq S \subseteq X$ e τ la topologia di X.
  Se D è denso in τ_S e S è denso in X, allora D è denso in X.
  Morale: un denso in un denso è denso.
- Sia $T \subseteq S \subseteq X$, con X spazio topologico.
  Osservare che:
  $$\tau_T = (\tau_S)_T$$
- Qual è la topologia indotta da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Z}$?
- Considerare $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topologia della metrica d del riccio e sia:
  $$\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$
  Qual è la distanza di due punti distinti di $\mathbb{S}^1$?
  Dimostrare che la topologia indotta su $\mathbb{S}^1$ è quella discreta.

Funzioni continue

Definizione 8 *Siano* (X,τ) *e* (Y,σ) *spazi topologici,* $f : X \to Y$ *una funzione,* $a \in X$.

- f *si dice* ***continua in a*** *se per ogni intorno* V *di* $f(a)$

$$\text{esiste un intorno } U \text{ di } a \text{ tale che } f(U) \subseteq V$$
$$\Updownarrow$$
$$f^{\leftarrow}(V) \text{ è un intorno di } a$$

- f *si dice* ***continua*** *se è continua in ogni punto* $a \in X$.

Osservazione importante:
Siano $\mathcal{B}_a$ e $\mathcal{B}_{f(a)}$ basi di intorni per a e $f(a)$ rispettivamente.
Allora V si può scegliere in $\mathcal{B}_{f(a)}$ e U esiste in $\mathcal{B}_a$.

Proposizione 9 *Siano* (X,d) *e* (Y,ρ) *spazi metrici.*

1) Una funzione $f : X \to Y$ *è continua in* $a \in X$ *se e solo se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ tale che } \forall\ x \in X\ d(x,a) < \delta\ \Rightarrow\ \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

(le disuguaglianze si possono prendere larghe).

2) Una funzione $f : X \to Y$ *è continua in* $a \in X$ *se e solo se per ogni successione* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di punti di* X *convergente ad* a *si ha che la successione* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $f(a)$.

$\boxed{\textit{Dimostrazione di 2}}$ *Necessità:* conseguenza immediata di 1.
Sufficienza. Per assurdo, se f non fosse continua in a, si potrebbe trovare $\bar{\varepsilon}$ con la seguente proprietà:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad f(B(a, \frac{1}{n}[) \not\subseteq B(f(a), \bar{\varepsilon}[)$$

In altri termini, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe $x_n \in X$ che dista meno di $\frac{1}{n}$ da a mentre $f(x_n)$ dista almeno $\bar{\varepsilon}$ da $f(a)$.
Dunque: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad a, mentre $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $f(a)$, assurdo. $\square$

Proposizione 10 *Siano* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$.
Se f *è continua in* a *e* g *è continua in* $f(a)$*, allora* $g \circ f$ *è continua in* a

Dimostrazione. $(g \circ f)^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(W))$. □

Perciò la composizione di funzioni continue è continua.
Fatti:

- ogni funzione costante è continua.
- la restrizione a un sottospazio di una funzione continua è continua.
- Se A è sottospazio aperto di X e $f_{|A}$ è continua in $a \in A$, allora f è continua in a (è essenziale l'ipotesi che A è aperto).
  Di conseguenza, se $f_{|A}$ è continua, allora f è continua nei punti di A.

Teorema 11 *Sia* $f : X \to Y$ *una funzione fra spazi topologici.*
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) f *è continua.*

ii) Per ogni aperto (di base) V *di* Y *si ha che* $f^{\leftarrow}(V)$ *è un aperto di* X.

iii) Per ogni chiuso F *di* Y *si ha* $f^{\leftarrow}(F)$ *è un chiuso di* X.

iv) Per ogni $A \subseteq X$ *si ha che* $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dimostrazione. L'equivalenza delle prime tre è elementare.
iii $\Rightarrow$ *iv* Poiché $A \subseteq f^{\leftarrow}(f(A)) \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{f(A)})$ e quest'ultimo insieme è chiuso, si ottiene $\overline{A} \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{f(A)})$. Passando all'immagine, si ha la tesi.
iv $\Rightarrow$ *iii* Sia F chiuso di Y e sia $A = f^{\leftarrow}(F)$.
Si ha: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F$, e quindi:

$$f(\overline{f^{\leftarrow}(F)}) \subseteq F$$

da cui $\overline{f^{\leftarrow}(F)} \subseteq f^{\leftarrow}(F)$.
Dunque $f^{\leftarrow}(F)$ è chiuso perché contiene la propria chiusura. □

Incollamento a pezzi.
Sia $f : X \to Y$ una funzione.

- Se X è unione di una famiglia di aperti $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$
  e $f_{|A_\lambda}$ è continua per ogni λ,
  allora f è continua.
- Se X è unione di una famiglia finita di chiusi $\{F_1, \ldots, F_m\}$
  e $f_{|F_j}$ è continua per ogni j,
  allora f è continua.

Morale: purché le restrizioni siano continue,
la continuità si conserva per unioni **finite** di chiusi e unioni **qualsiasi** di aperti.

Esempio. Una funzione $f : X \to Y$ si dice localmente costante se per ogni $a \in X$ esiste un intorno U di a tale che $f(x) = f(a)\ \forall x \in U$.
Ogni funzione localmente costante è continua.

Esercizio. Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1$ definita da:

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

Dimostrare che f è biiettiva e continua
ma che l'inversa non è continua in $a = (1, 0)$
(trovare in $\mathbb{S}^1$ un'opportuna successione $(y_n) \to a$ tale che $(f^{-1}(y_n))$ non converge).

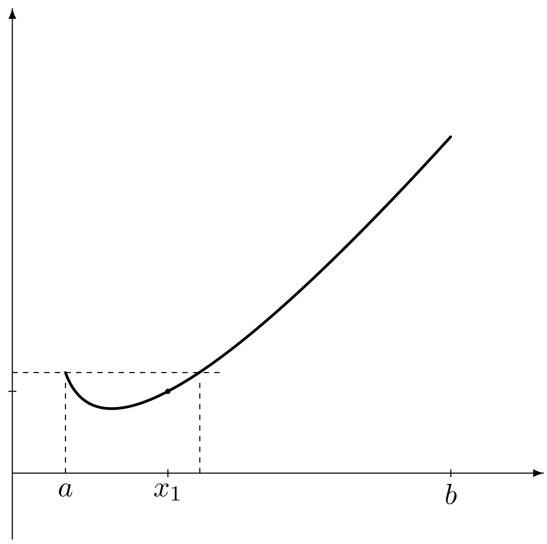
Definizione 12 *Siano X, Y spazi topologici.*
*Una funzione $f : X \to Y$ è detta **omeomorfismo** se è continua, biiettiva e la sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ è pure continua.*
X e Y si dicono omeomorfi se esiste un omeomorfismo tra di essi.

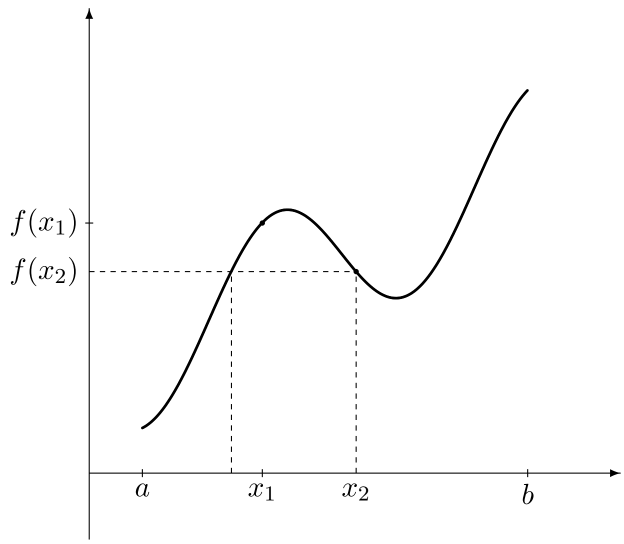
Esercizi.

- Entro una data famiglia di spazi topologici, l'essere omeomorfi è una relazione di equivalenza.
- La funzione $f : \mathbb{R} \to]-1,1[$ definita da:

$$f(t) = \frac{t}{1+|t|}$$

  è un omeomorfismo.
  L'inversa è: $f^{-1}(s) = \frac{s}{1-|s|}$
- Due intervalli aperti di $\mathbb{R}$ sono sempre omeomorfi.
- ogni omeomorfismo tra due intervalli di $\mathbb{R}$ è necessariamente una funzione monotona (quindi devono essere entrambi aperti, entrambi chiusi,...).





Esempio. La **retta estesa**

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

viene ordinata dall'ordine usuale di $\mathbb{R}$, con le condizioni aggiuntive che $+\infty$ sia massimo e che $-\infty$ sia minimo.
$\tilde{\mathbb{R}}$ viene topologizzato assumendo come base di aperti gli usuali aperti di $\mathbb{R}$ e in più gli intervalli del tipo $[-\infty, a[$ e $]b, +\infty]$;
questi ultimi formano una base di intorni rispettivamente di $-\infty$ e $+\infty$.
Osservare che $\mathbb{R}$ è un sottospazio aperto di $\tilde{\mathbb{R}}$.
La funzione $g : \tilde{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ definita da

$$g(t) = \frac{t}{1+|t|} \text{ se } t \in \mathbb{R}, \quad g(-\infty) = -1, \quad g(+\infty) = 1$$

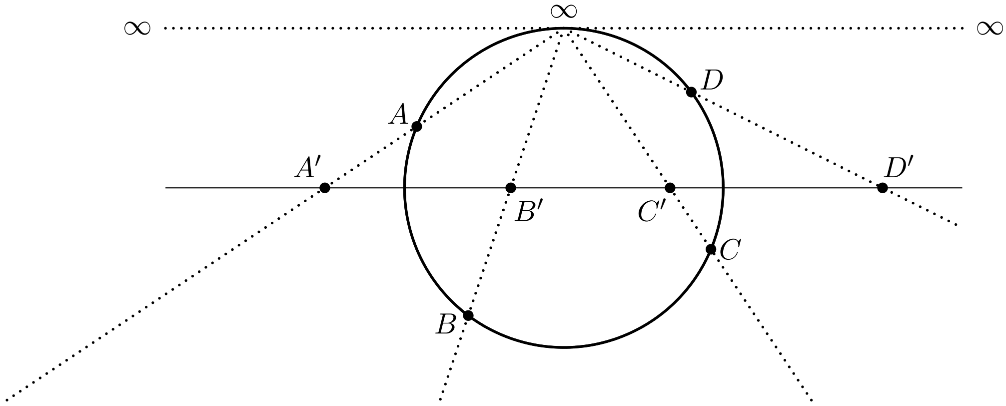
è un omeomorfismo:
nei punti di $\mathbb{R}$ la g coincide con la f precedente;
agli estremi si verifica direttamente (con gli intorni, fare un grafico).
$\tilde{\mathbb{R}}$ è metrizzabile con la metrica:

$$d_g(x, y) = |g(x) - g(y)|$$

Compattificazione con un punto di $\mathbb{R}^n$ (v. libro pag. 69):

$$\alpha\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$

Gli aperti sono gli aperti di $\mathbb{R}^n$ e i complementari in $\alpha\mathbb{R}^n$ dei sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$.
$\alpha\mathbb{R}$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$, $\alpha\mathbb{R}^2$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^2$, ...



Proposizione 13 *Sia $f: X \to Y$ una funzione continua, ove Y è di Hausdorff e sia $c \in Y$. Allora l'insieme:*

$$f^{\leftarrow}(\{c\}) = \{x \in X : \ f(x) = c\}$$

è un chiuso di X.

In altri termini, gli *insiemi di livello* di una funzione continua sono sottoinsiemi chiusi del dominio.

Proposizione 14 *Siano $f, g: X \to Y$ funzioni continue.*
Se Y è di Hausdorff, l'insieme:

$$C = \{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$$

è chiuso in X.

Basta dimostrare che $X \setminus C$ è aperto.
Se $p \notin C$, allora $f(p) \neq g(p)$ ...

Corollario 15 *Siano $f, g: X \to Y$ funzioni continue, ove Y è di Hausdorff.*
Sia D un sottoinsieme denso di X tale che $f(x) = g(x)\ \forall\, x \in D$.
Allora $f(x) = g(x)\ \forall\, x \in X$.

Definizione di limite. Sottinteso: $D \subseteq X$, $f: D \to Y$, $a \in D'$, $l \in Y$.

$$l \in \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x)$$

significa che:

per ogni intorno V di l esiste un intorno U di a tale che:

$$\forall\, x \in (U \setminus \{a\}) \cap D \text{ si ha } f(x) \in V$$

Se Y è di Hausdorff il limite, se esiste, è unico e si scrive:

$$l = \lim_{x \to a} f(x)$$

tenendo presente che il dominio è implicito nella funzione.

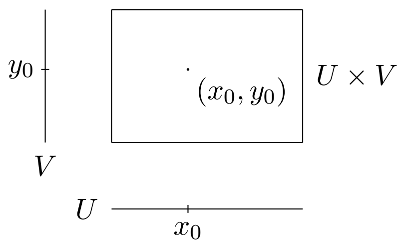
Prodotto di spazi topologici

Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici.
Sul prodotto cartesiano $X \times Y$ vogliamo porre una topologia in modo che:

un punto (x, y) sta in un intorno di (x_0, y_0)
$\iff$ x sta in un intorno di x_0 e y sta in un intorno di y_0.

Una base di intorni di (x_0, y_0) sarà pertanto della forma:

$$\{U \times V : \; U \in \mathcal{I}_{x_0}, \; V \in \mathcal{I}_{y_0}\}$$



Questa topologia si chiama **topologia prodotto**.
Se $\mathcal{A}$ è una base per gli aperti di τ e $\mathcal{B}$ è una base per gli aperti di σ, allora una base per gli insiemi aperti nella topologia prodotto di $X \times Y$ è data da:

$$\{A \times B : \; A \in \mathcal{A}, \; B \in \mathcal{B}\}$$

Se X e Y sono metrizzabili dalle metriche d_X e d_Y, allora la topologia prodotto è metrizzabile ad esempio dalla metrica d_∞ così definita:

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), \; d_Y(y_1, y_2)\}$$

È facile vedere che nella metrica prodotto d_∞ la palla di centro (x_0, y_0) e raggio r è data da:

$$B_{d_\infty}((x_0, y_0), r[= B_{d_X}(x_0, r[\times B_{d_Y}(y_0, r[$$

Proposizione 16 *Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $p_j = (x_j, y_j)$ un punto di $X \times Y$. Allora $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $l = (l_1, l_2)$ se e solo se $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a l_1 e $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a l_2.*

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi normati, il prodotto $X \times Y$ diventa uno spazio vettoriale con le operazioni definite per componenti.
Esso diventa uno spazio normato con la norma definita da:

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X,\ \|y\|_Y\}$$

e tale norma induce la metrica prodotto e quindi la topologia prodotto.

Consideriamo ora le proiezioni canoniche:

$$\mathrm{pr}_X :\ X \times Y \to X, \qquad \mathrm{pr}_Y :\ X \times Y \to Y$$

definite da:

$$\mathrm{pr}_X(x, y) = x, \qquad \mathrm{pr}_Y(x, y) = y$$

(a volte pr_1 e pr_2).
Una funzione si dice **aperta** se manda ogni aperto (del dominio) in un aperto (del codominio).

Proposizione 17 *Se $X \times Y$ è munito della topologia prodotto, allora le proiezioni canoniche pr_X e pr_Y sono funzioni continue e aperte.*

Dimostrazione. 1) pr_X è continua: $\mathrm{pr}_X^{\leftarrow}(A) = A \times Y$.
2) pr_X è aperta perché manda un intorno di base in un intorno:

$$\mathrm{pr}_X(U \times V) = U$$

$\square$

Esercizio. Osservare che la topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$ è la topologia prodotto.
Dimostrare che la funzione $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = xy$ è continua e che pertanto $\{(x, y) :\ xy = 1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$.
Dedurre che le proiezioni non sono in generale funzioni chiuse (una funzione si dice chiusa se manda chiusi in chiusi).

D'ora in poi il prodotto sarà dotato della topologia prodotto.

Osservazione. Siano X e Y spazi topologici e E sottospazio di X. La topologia prodotto di $E \times Y$ coincide con la topologia relativa indotta da $X \times Y$.
Sia $x_0 \in X$.
Allora $\{x_0\} \times Y$ è omeomorfo a Y tramite la proiezione pr_Y.

Notazione. Se $g : X \to Y_1 \times Y_2$ è una funzione, allora

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x)) \quad \forall\, x \in X$$

ove $g_1 = \mathrm{pr}_1 \circ g$ e $g_2 = \mathrm{pr}_2 \circ g$ sono dette le **componenti** di g.
Scriveremo anche:

$$g = (g_1, g_2)$$

Viceversa, se $f_1 : X \to Y_1$ e $f_2 : X \to Y_2$ sono due mappe, si definisce la **mappa diagonale**:

$$(f_1 \times f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

Ogni mappa a valori in un prodotto è la diagonale delle sue componenti.

Proposizione 18 *Sia* $g : X \to Y_1 \times Y_2$ *una funzione;*
g *è continua* $\iff$ *le sue componenti* $g_1 = \mathrm{pr}_1 \circ g$ *e* $g_2 = \mathrm{pr}_2 \circ g$ *sono continue.*

Dimostrazione.

- Se g è continua allora g_1 è continua perché composizione di funzioni continue.

- Se g_1 e g_2 sono continue, siccome

  $$g^{\leftarrow}(U \times V) = g_1^{\leftarrow}(U) \cap g_2^{\leftarrow}(V)$$

  si ottiene la continuità di g facendo variare U e V tra gli aperti di Y_1 e Y_2.

□

La topologia prodotto e i risultati sopra esposti si possono estendere ai prodotti finiti di spazi topologici.
Se $(X_j, \tau_j)_{1 \le j \le m}$ sono spazi topologici, una base per la topologia prodotto sul prodotto cartesiano

$$\prod_{j=1}^{m} X_j$$

è data dagli insiemi del tipo:

$$\prod_{j=1}^{m} A_j, \quad \text{al variare di } A_j \in \tau_j.$$

- Le proiezioni pr_j sono continue e aperte;
- una funzione g a valori in un prodotto è continua $\iff$ tutte le componenti

  $$g_j = \mathrm{pr}_j \circ g$$

  sono continue;
- un prodotto di metrizzabili è metrizzabile;
- un prodotto di normati è normato.

Esercizi e complementi sul prodotto

Esercizio. Dati $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, dimostrare che:

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}(A \times B) = \mathrm{cl}_X(A) \times \mathrm{cl}_Y(B)$$

Dedurre che $A \times B$ è chiuso se e solo se A e B sono chiusi.

Esercizio. Sia X un $\mathbb{K}$-spazio normato.
La funzione $+ :\ X \times X \to X$ definita da $(x, y) \to x + y$ è lipschitziana e quindi continua.
La funzione $\mathbb{K} \times X \to X$ definita da $(\lambda, x) \to \lambda x$ è continua.

Dato uno spazio normato X, consideriamo la sfera dei versori di X:

$$S_X = \{u \in X :\ \|u\| = 1\}$$

La mappa:

$$\sigma :\ X \setminus \{0\} \longrightarrow S_X \quad \text{definita da} \quad \sigma(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

si chiama **proiezione radiale** o **segno**.

Esercizio. Dimostrare che la proiezione radiale σ è una funzione continua.
Dimostrare che la funzione $p :\ x \longrightarrow (\|x\|, \sigma(x))$ stabilisce un omeomorfismo di $X \setminus \{0\}$ su $]0, +\infty[\times S_X$.

Esercizio. Uno spazio topologico Y è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta_Y = \{(y, y) :\ y \in Y\}$$

è un sottoinsieme chiuso di $Y \times Y$.

Sia $f :\ X \to Y$ una funzione.
Il grafico di f è il sottoinsieme di $X \times Y$:

$$G = G_f = \{(x, f(x)) :\ x \in X\}$$

Si osservi che G_f è l'antiimmagine della diagonale Δ_Y tramite la mappa:

$$X \times Y \longrightarrow Y \times Y, \qquad (x, y) \longrightarrow (f(x), y)$$

Se f è continua, quest'ultima mappa è continua.
Perciò, se Y è di Hausdorff ($= \Delta_Y$ chiusa), il grafico è chiuso in $X \times Y$.

Proposizione 19 *Siano X e Y spazi topologici, $f : X \to Y$ una funzione continua.*
Allora il grafico G_f (come sottospazio di $X \times Y$) è omeomorfo a X tramite la mappa diagonale

$$x \to (x, f(x))$$

Se Y è di Hausdorff, allora G_f è chiuso in $X \times Y$.

Esercizio. Siano S la retta di Sorgenfrey, $a, b \in S$ con $a < b$.

1. Mostrare che $[a, b[$ è chiusaperto (cioè sia aperto sia chiuso).
2. Mostrare che $]a, b[$ è aperto e trovarne la chiusura.
3. Cosa si può dire di $]a, b]$?
4. Sia $T \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato.
   Dimostrare che se T è chiuso in S allora ha minimo.
   Se T è superiormente limitato e chiuso in S, non ha necessariamente massimo.
5. Dimostrare che ogni aperto di S è privo di massimo.

Risoluzione.

1. $[a, b[$ è aperto per definizione di topologia di Sorgenfrey.
   Se $c \geq b$ allora $[c, c + 1[$ è un intorno di c disgiunto da $[a, b[$;
   Se $c < a$ allora $[c, a[$ è un intorno di c disgiunto da $[a, b[$;
   pertanto $S \setminus [a, b[$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto.
2. Per ogni $c \in]a, b[$, l'intervallo $[c, b[$ è un intorno di c contenuto in $]a, b[$.
   Poiché $[a, b[$ è chiuso, allora $\mathrm{cl}(]a, b[) \subseteq [a, b[$;
   poiché ogni intorno di a del tipo $[a, a+\varepsilon[$ interseca $]a, b[$, si ha $a \in \mathrm{cl}(]a, b[)$;
   dunque $\mathrm{cl}(]a, b[) = [a, b[$.
3. Nulla.
   Non è chiuso perché a è di accumulazione;
   non è aperto perché ogni intorno di b ha punti fuori.
4. L'estremo inferiore, se non appartiene a T, è di accumulazione: se T è chiuso, esso deve appartenere a T. $\square$

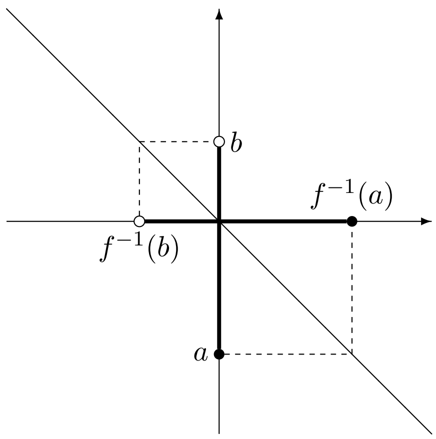
Esercizio. Sia S la retta di Sorgenfrey.
Una successione crescente di punti di S ha limite in S se e solo se è definitivamente costante.
Una successione decrescente limitata converge verso l'estremo inferiore dei suoi termini.

Esercizio. Sia S la retta di Sorgenfrey.
La funzione $(x, y) \to x + y$ è continua da $S \times S$ in S.
La biiezione $f(x) = -x$ non è continua da S in S.
Il suo grafico G_f ha la topologia discreta.

Per la somma: da $x_0 \leq x < x_0 + \varepsilon$ e $y_0 \leq y < y_0 + \varepsilon$ si ottiene:

$$x_0 + y_0 \leq x + y < x_0 + y_0 + 2\varepsilon$$

f non è continua,



G_f ha la topologia discreta: