

ABR-InOrder

Dimostrare che un albero binario è un Albero Binario di Ricerca se e solo se una visita simmetrica visita i nodi in ordine crescente rispetto alla chiave.

Soluzione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni.

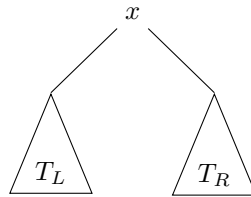
- Sia T un albero binario e supponiamo che la procedura `InOrder`,

```
InOrder(x)
  if x <> nil
    InOrder(x.left)
    print x
    InOrder(x.right)
```

applicata alla radice, stampi i nodi dell'albero in ordine crescente di chiave.

Dimostriamo che T è un ABR per induzione sull'altezza h dell'albero.

- ($h = 0$) L'albero è vuoto e quindi è un ABR.
- ($h > 0$) In questo caso, detta x la radice, l'albero ha la forma



La procedura `InOrder(x)` produce per ipotesi una sequenza ordinata, che, per come funziona la procedura sarà:

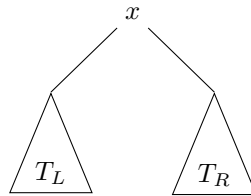
$$\underbrace{x_1, \dots, x_l}_{\text{InOrder}(x.\text{left})} \quad x \quad \underbrace{y_1, \dots, y_r}_{\text{InOrder}(x.\text{right})}$$

Dunque `InOrder(x.left)` produce la sequenza ordinata x_1, \dots, x_l dei nodi di T_L , che quindi, per ipotesi induttiva, è un ABR. Allo stesso modo `InOrder(x.right)` produce la sequenza ordinata y_1, \dots, y_r dei nodi di T_R , che quindi, per ipotesi induttiva, è un ABR. Infine, dato che l'intera sequenza è ordinata, $x.\text{key} \geq x_i.\text{key}$, ovvero la chiave di x , è maggiore o uguale a quella dei nodi in T_L . Similmente $x.\text{key} \leq y_j.\text{key}$, ovvero la chiave di x , è minore o uguale a quella dei nodi in T_R . Tutto questo permette di concludere che T è un ABR.

- Per l'implicazione opposta, supponiamo che T sia un ABR e mostriamo che `InOrder` applicata alla radice produce i nodi di T ordinati in senso crescente rispetto alla chiave.

Anche in questo caso procediamo per induzione sull'altezza h dell'albero.

- ($h = 0$) L'albero è vuoto, `InOrder` produce la sequenza vuota che è il risultato atteso.
- ($h > 0$) In questo caso, detta x la radice, l'albero ha la forma



La procedura $\text{InOrder}(x)$ produce per ipotesi una sequenza ordinata, che, per come funziona la procedura sarà:

$$\underbrace{x_1, \dots, x_l}_{\text{InOrder}(x.\text{left})} \quad x \quad \underbrace{y_1, \dots, y_r}_{\text{InOrder}(x.\text{right})}$$

Per ipotesi induttiva, x_1, \dots, x_l è la sequenza ordinata dei nodi di T_L e y_1, \dots, y_r è la sequenza ordinata dei nodi di T_R . Infine, essendo T un ABR, $x.\text{key} \geq x_i.\text{key}$, dato che la chiave di x , è maggiore o uguale a quella dei nodi in T_L e similmente $x.\text{key} \leq y_j.\text{key}$, dato che la chiave di x , è minore o uguale a quella dei nodi in T_R . Tutto questo implica che l'intera sequenza è ordinata, come desiderato.