**Computabilità e Algoritmi (Computabilità)**
**1 Settembre 2016**
(con bozza di soluzione)

**Esercizio 1**
Enunciare e dimostrare il secondo teorema di ricorsione.

**Esercizio 2**
Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } \varphi_x(x)\downarrow \\ 2x \dot{-} 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

**Soluzione:** La funzione non è calcolabile, dato che possiamo scrivere

$$\chi_K(x) = sg(f(x) \dot{-} 2x).$$

Se $f$ fosse calcolabile, dedurremmo che anche $\chi_K$ lo è, mentre sappiamo che $K$ non è ricorsivo, ovvero $\chi_K$ non è calcolabile. □

**Esercizio 3**
Sia $f$ una funzione calcolabile totale tale che $img(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{N}\}$ sia infinito. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \ : \ \exists y \in W_x.\ x < f(y)\},$$

ovvero dire se $A$ e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

**Soluzione:** L'insieme $A$ non è ricorsivo dato che $K \leq_m A$. Infatti, si consideri la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

è calcolabile. Dunque per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$, e la funzione $s$ è funzione di riduzione.

Infatti, se $x \in K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = 1$ per ogni $y$. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$, e pertanto $f(W_{s(x)}) = f(\mathbb{N}) = img(f)$, che è infinita per ipotesi. Pertanto certamente esiste $z \in f(W_{s(x)})$ tale che $x < z$, ovvero esiste $y \in W_{s(x)}$ tale che $s(x) < f(y)$. Dunque $s(x) \in A$.

Se invece $x \notin K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)\uparrow$ per ogni $y$. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$, e pertanto, certamente non esiste $y \in W_{s(x)}$ tale che $s(x) < f(y)$. Dunque $s(x) \notin A$.

L'insieme $A$ è r.e., infatti

$$sc_A(x) = \mu w.(H(x,(w)_1,(w)_2) \ \wedge \ x < f((w)_1))$$

Pertanto, $\bar{A}$ non r.e.

$\square$

**Esercizio 4**
Detto $A = \{x \mid \varphi_x \text{ è totale}\}$, dimostrare che $\bar{K} \leq_m A$.

**Soluzione:** Si definisce

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ ed è facile vedere che $s$ può essere la funzione di riduzione. $\square$

**Esercizio 5**
Esiste una funzione calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile tale che $dom(f) = K$ e $cod(f) = \mathbb{N}$? Motivare adeguatamente la risposta.

**Soluzione:** Si esiste, ad esempio si puó considerare $f(x) = \varphi_x(x)$. Chiaramente $dom(f) = K$. Inoltre, per ogni $k \in N$, se si considera un indice $e$ della funzione costante $k$ si ha che $f(e) = \varphi_e(e) = k$. Quindi $cod(f) = \mathbb{N}$.

Alternativamente si può definire

$$f(x) = (\mu t.H(x,x,t)) - 1$$

Chiaramente $dom(f) = K$ poiché $f(x) \downarrow$ sse esiste $t$ tale che $H(x,x,t)$, i.e., sse $x \in K$. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{N}$ basta prendere il programma $Z_k$ che consiste di $Z(1)$ ripetuto $x$ volte. Sull'indice corrispondente $y = \gamma(Z_k)$ avremo $f(y) = k-1$, che mostra che $cod(f) = \mathbb{N}$.

$\square$

**Nota**: Correzione, risultati e visione dei compiti: *Mercoledì 7 Settembre, ore 9:30, 1BC/45*