Computabilità e Algoritmi (Computabilità)
Prova Intermedia - 18 Novembre 2019

Esercizio 1

Si consideri una variante della macchina URM, nella quale l'istruzione di azzeramento è sostituita dall'istruzione `P(n)` il cui effetto è quello di sostituire il contenuto del registro n con il suo predecessore, ovvero $r_n \leftarrow r_n \dot{-} 1$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Si ha che $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, dato che le istruzioni di ciascuna macchina sono codificabili nell'altra.

Per provare $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, si mostra che, dato un programma URM' P' e $k \in \mathbb{N}$, si può ottenere un programma URM P che calcola la stessa funzione, ovvero tale che $f_P^{(k)} = f_{P'}^{(k)}$, come segue. Si osserva che ogni istruzione `P(n)`, detto j il suo numero d'ordine e $m = \max\{\rho(P'), k\} + 1$ il primo registro non usato da P', può essere sostituita da un salto alla subroutine

```
SUB:    J(n,m,j+1)
        S(m)
LOOP:   J(n,m,END)
        S(m)
        S(m+1)
END     T(m+1,n)
        J(1,1,j+1)
```

Più formalmente, si dimostra che dato un qualunque programma P' della macchina URM', si può ottenere un programma equivalente P, ovvero tale che $f_P^{(k)} = f_{P'}^{(k)}$, che non usa istruzioni $P(n)$, che è quindi un programma URM. La dimostrazione procede per induzione sul numero h di istruzioni `P(n)` in P'.

- ($h = 0$) In questo caso P' è già il programma desiderato.
- ($h \to h + 1$) Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h + 1$. Il programma P' contiene certamente almeno una istruzione $P(n)$. Sia j l'indice di una tale istruzione. Quindi P' ha la forma:

$$\begin{array}{lcl} 1 & : & I_1 \\ & & \dots \\ j & & P(n) \\ & & \dots \\ \ell(P') & : & I_{\ell(P')} \end{array}$$

  Costruiamo un programma P'', utilizzando un registro di indice $m = \max\{\rho(P'), k\} + 1$, non riferito da P'

```
1       :  I_1
           ...
j          J(1,1,SUB)
           ...
ℓ(P')   :  I_ℓ(P')
           J(1,1,END)
SUB     :  J(n,m,j+1)
           S(m)
LOOP    :  J(n,m,RES)
           S(m)
           S(m+1)
           J(1,1,LOOP)
RES     :  T(m+1,n)
           J(1,1,j+1)
END     :
```

Il programma P'' è tale che $f^{(k)}_{P''} = f^{(k)}_{P'}$ e contiene h istruzioni di tipo `P(n)`. Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P tale che $f^{(k)}_{P} = f^{(k)}_{P''}$ che quindi è il programma desiderato.

Per l'inclusione opposta $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, si procede in modo analogo, osservando che l'istruzione `Z(n)` si può codificare nella macchina URM' come segue, dove m è, come sopra, l'indice di un registro oltre l'area utilizzata dal programma (e quindi a 0)

```
SUB:  J(n,m,j+1)
      P(n)
      J(1,1,SUB)
```

Ancora più semplicemente, si può osservare che ogni istruzione `Z(n)` è sostituibile da una istruzione `T(m,n)`. □

Esercizio 2

Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $\varphi_{k(n)}$ è totale e $E_{k(n)}$ è l'insieme dei divisori interi di n.

Soluzione: Per l'enunciato del teorema smn, si rimanda al libro.

Per la seconda parte, si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è un divisore di } n \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad = n * \overline{sg}(rm(x,n)) + sg(rm(x,n))$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n,x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \mathbb{N}$;
- $E_{k(n)} = \{x \mid rm(x,n) = 0\} \cup \{1\}$,
  che è l'insieme dei divisori di n, dato che 1 è sempre un divisore di n.

□

Esercizio 3

Definire una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \subseteq \{0, 1\}$.

La funzione $\overline{sg} \circ f$ può essere calcolabile? Motivare la risposta.

Soluzione: Per la prima parte, si definisca $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per diagonalizzazione come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \overline{sg}(\varphi_x(x)) & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione f è totale e non calcolabile dato che, per definizione, $f(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Per la seconda domanda, la risposta è chiaramente no. Per questo basta osservare che $f = \overline{sg} \circ (\overline{sg} \circ f)$, quindi se $\overline{sg} \circ f$ fosse calcolabile, lo sarebbe anche f per composizione. □