Università degli Studi di Udine

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Dipartimento di Matematica e Informatica

Tesi di Laurea
in Scienze dell'Informazione

UN TEOREMA DI PUNTO FISSO PER LA SOLUZIONE DI EQUAZIONI DI DOMINIO IN UNA CATEGORIA DI ALBERI

Relatore: Prof. Furio Honsell

Supervisore: Dott. Fabio Alessi

Candidato: Baldan Paolo

Anno Accademico 2009–2010 — Sessione estiva

Ai miei genitori

Introduzione

Il termine 'semantica' fu introdotto in un libro di Michel Breal, pubblicato nel 1900, per indicare lo studio del modo in cui si evolve nel tempo il significato delle parole. Attualmente con tale termine si indica lo studio del significato dei linguaggi, dal linguaggio naturale ai linguaggi logico-matematici e di programmazione.

Definire una semantica di un linguaggio di programmazione significa specificare un metodo formale che consenta di assegnare a ciascun programma (corretto) del linguaggio un significato.

Nell'approccio *operazionale* il significato di un programma è definito come la sequenza degli stati interni assunti da un interprete durante la valutazione del programma. Nell'approccio *assiomatico* non si definisce esplicitamente il significato di un programma, ma si individuano formule logiche che descrivono i costrutti del linguaggio, dalle quali dedurre le proprietà dei programmi. Diversamente, nell'approccio *denotazionale*, una funzione di valutazione assegna direttamente ad ogni programma del linguaggio il suo significato detto *denotazione*, che è visto come elemento di qualche opportuno dominio. Già a questo livello si profila l'importanza dello studio delle equazioni di dominio ricorsive, che costitituiscono l'argomento principale della presente tesi. Infatti, la determinazione esplicita di un dominio matematico i cui punti forniscano le interpretazioni dei programmi di un dato linguaggio, è questione tutt'altro che banale e coinvolge tecniche matematiche piuttosto sofisticate. Il problema può essere risolto in vari modi, ma la tecnica che appare essere più generale consiste nel considerare una categoria sufficientemente 'ricca', ossia chiusa rispetto alle costruzioni indotte dai costruttori del linguaggio, e 'completa'. Questa seconda proprietà verrà spiegata diffusamente nel seguito. Qui ci limitiamo a dire che essa è legata alla possibilità di definire oggetti della categoria come punti fissi di particolari funtori. In tale approccio, quindi, i domini D i cui punti rappresenteranno le denotazioni dei programmi di un linguaggio $\mathcal{L}$, possono essere definiti come soluzioni di un'equazione di dominio ricorsiva del tipo

$$D = FD$$

dove F è un opportuno funtore, legato alle caratteristiche sintattiche del linguaggio $\mathcal{L}$. Ad esempio, il dominio delle stringhe su di un alfabeto A è definito in modo naturale come soluzione dell'equazione $D = \{\varepsilon\} + A \times D$.

Tale approccio ha inoltre il vantaggio di permettere la scelta di categorie appropriate, i cui oggetti presentino struttura adatta ad esprimere le proprietà di equivalenza tra i programmi del linguaggio, ritenute interessanti. Ad esempio, nel caso dei linguaggi concorrenti, dato che un processo anche se infinito è comunque significativo, non si parla più di risultato prodotto da un

programma, ma il significato di un programma è definito come la sequenza degli stati generati dalla sua esecuzione (la *traccia* del programma). Per confrontare differenti programmi risulta dunque naturale vedere le tracce come elementi di un appropriato spazio metrico, nel quale la distanza tra due tracce è definita in modo tale da essere tanto più piccola quanto più lungo è il segmento iniziale comune delle due tracce.
La presente tesi si inserisce nel filone di ricerca che ha per argomento la semantica denotazionale dei linguaggi non deterministici e paralleli, sviluppata all'interno di categorie di spazi metrici. Più in dettaglio lo scopo della tesi è quello di trasferire nozioni e tecniche tipiche dell'approccio metrico nell'ambito degli insiemi parzialmenti ordinati. Tale operazione può portare all'introduzione di nuove nozioni sugli insiemi parzialmente ordinati (si veda ad esempio la nozione di punto fisso per funzioni contrattive sui $\mathcal{BT}$*-alberi*), che potrebbero poi essere usate in un contesto diverso da quello in cui sono nate. Inoltre i risultati ottenuti nell'ambito degli ordini parziali hanno una immediata ricaduta sulla comprensione degli stessi spazi metrici, come accade nel caso del teorema di esistenza ed unicità del punto fisso per funtori contraenti.

Il risultato principale della tesi è appunto la dimostrazione dell'esistenza ed unicità del punto fisso per endofuntori contraenti nella categoria dei $\mathcal{BT}$*-alberi* (e quindi nella categoria equivalente degli spazi ultrametrici compatti).

La tesi si compone di due parti.
La prima parte presenta i preliminari matematici necessari. Nel capitolo 1 sono introdotte le nozioni di base relative alle strutture ordinate. Sono analizzati in particolare gli ordini parziali completi e la loro relazione con i preordini, stabilita dal completamento ideale. Il capitolo 2 è dedicato agli spazi metrici ed evidenzia le notevoli proprietà topologiche e metriche degli spazi ultrametrici e ultrametrici compatti (*CUM*). Infine il capitolo 3 presenta le nozioni fondamentali della teoria delle categorie. È proposto un teorema di punto fisso categoriale e vengono introdotte le *categorie cartesiane chiuse* che rappresentano la principale connessione tra la teoria della categorie e le sue applicazioni informatiche.
La seconda parte contiene i risultati. Raccoglie i contributi originali della tesi, ad eccezione del capitolo 5, che presenta un risultato tratto da un articolo di America e Rutten [1]. In primo luogo, nel capitolo 4, è analizzata la topologia delle sfere degli spazi ultrametrici compatti. Questo porta alla definizione di un particolare tipo di struttura ordinata, i $\mathcal{BT}$*-alberi*. La relazione esistente tra le due entità matematiche è espressa in modo formale dal teorema che stabilisce l'equivalenza tra una categoria di spazi ultrametrici compatti ed una categoria di $\mathcal{BT}$*-alberi*. Le principali nozioni metriche (funzioni non-distance-increasing, funzioni contrattive) sono trasferite in ambito ordinato. Interessante è la formulazione del teorema delle contrazioni di Banach-Cacciopoli per i $\mathcal{BT}$*-alberi*. Sono quindi introdotti i principali costruttori di dominio (prodotto, somma, spazio delle funzioni, powerdomain) nella categoria dei *CUM* e in quella dei $\mathcal{BT}$*-alberi* e viene provata l'equivalenza tra i costruttori nelle due categorie.
Il capitolo 6 presenta un teorema di punto fisso in una categoria di spazi metrici completi, ideato da America e Rutten [1]. Dapprima è introdotta, in tale categoria, la nozione di torre convergente e si mostra che ogni torre convergente ha un limite. Quindi si definiscono i funtori

contraenti, provando per essi l'esistenza del punto fisso e si dà una condizone (Hom-contraenza), che garantisce l'unicità del punto fisso. Il risultato si applica immediatamente alle equazioni di dominio che coinvolgono i costruttori più comuni. È interessante la corrispondenza esistente tra il risultato categoriale ed il teorema delle contrazioni sugli spazi metrici completi di Banach e Caccipoli.

I risultati provati nella categoria degli spazi completi possono essere particolarizzati alla categoria avente come oggetti i *CUM*. Nel capitolo 6 è sviluppato uno studio corrispondente delle equazioni di dominio nella categoria dei $\mathcal{BT}$*-alberi*, con la formulazione delle nozioni di torre convergente, limite diretto e funtore contraente. Di particolare interesse è il teorema di punto fisso, che garantisce esistenza ed unicità del punto fisso di funtori contraenti nella categoria dei $\mathcal{BT}$*-alberi* senza la necessità di introdurre l'ipotesi di Hom-contrattività. Come nel caso metrico, si mostra, infine, una classe di equazioni di dominio con un'unica soluzione nella categoria.

Indice

Parte I

Preliminari Matematici

Capitolo 1

Strutture Ordinate

Le strutture ordinate rivestono un ruolo fondamentale nello studio della semantica dei linguaggi di programmazione. In particolare i *CPO* (*complete partial order*), con il teorema di punto fisso per le funzioni continue, costituiscono un ottimo ambiente per l'interpretazione della ricorsione. In realtà noi utilizzeremo i CPO solo come strumento per dare una caratterizzazione della struttura di altri particolari insiemi ordinati, i *$\mathcal{BT}$-alberi*. Infine si vedrà la relazione esistente tra CPO e preordini, espressa dal *completamento ideale*.

Definizione 1.0.1 Sia D un insieme; una *relazione* r su D è un qualsiasi sottoinsieme di $D \times D$. Diremo che r è:

- *riflessiva* se, per ogni $a \in D$, $(a, a) \in r$.
- *simmetrica* se, per ogni $a, b \in D$, se $(a, b) \in r$ allora $(b, a) \in r$.
- *transitiva* se, per ogni $a, b, c \in D$, se $(a, b), (b, c) \in r$ allora $(a, c) \in r$.
- *antisimmetrica* se, per ogni $a, b \in D$, se $(a, b), (b, a) \in r$ allora $a = b$.
- *equivalenza* se è riflessiva, simmetrica e transitiva.
- *preordine* se è riflessiva e transitiva. Indicheremo con $\sqsubseteq$ una generica relazione di preordine. Per $a, b \in D$, la scrittura $a \sqsubset b$ significa $a \sqsubseteq b$ e $a \neq b$. Diremo che $(D, \sqsubseteq)$ è un *preordine*. Diremo che $m \in D$ è un *minimo*[1] (*massimo*) di $(D, \sqsubseteq)$ se, per ogni $a \in D$, vale $m \sqsubseteq a$ ($a \sqsubseteq m$). Diremo che $m \in D$ è un elemento *minimale* (*massimale*) di $(D, \sqsubseteq)$ se, per ogni $a \in D$, $a \sqsubseteq m$ ($m \sqsubseteq a$) implica $a = m$. Per $X \subseteq D$, chiameremo *estremo superiore di* X, e lo denoteremo con $\sqcup X$, l'elemento di D (se esiste) tale che

  a. per ogni $x \in X$, $x \sqsubseteq \sqcup X$ (cioè $\sqcup X$ è *maggiorante* per X).

[1] Si osservi come in un preordine il minimo (o il massimo) può non essere unico. Ciò è dovuto al fatto che $\sqsubseteq$ non è antisimmetrica. Ad esempio l'insieme $\{a, b\}$ preordinato dalla relazione $\sqsubseteq = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ ammette i minimi a e b. Qualora il preordine sia anche antisimmetrico, e dunque sia un ordine parziale, è facile verificare che il minimo (massimo), se esiste, è unico.

b. per ogni $a \in D$, se per ogni $x \in X$, $x \sqsubseteq a$, allora $\sqcup X \sqsubseteq a$ (cioè $\sqcup X$ è un minimo tra i maggioranti di X.

- *ordine parziale* se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se, per ogni $a, b \in D$, $a \sqsubseteq b$ oppure $b \sqsubseteq a$ diremo che $\sqsubseteq$ è un *ordine totale*. Diremo che $(D, \sqsubseteq)$ è un *insieme parzialmente (totalmente) ordinato*.

Quando il contesto lo consente sottointenderemo la relazione $\sqsubseteq$ e scriveremo D in luogo del preordine $(D, \sqsubseteq)$.

Definizione 1.0.2 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un insieme parzialmente ordinato e sia $d \in D$. Si definisce allora:

- $\downarrow d = \{d' \in D : d' \sqsubseteq d\}$
- $\uparrow d = \{d' \in D : d \sqsubset d'\}$
- *Succ*(d) l'insieme degli elementi minimali di $\uparrow d$ (tali elementi sono detti *successori (immediati)* di d).

1.1 CPO e Algebricità

Quando si usa una struttura ordinata come dominio semantico, l'idea è quella di interpretare la relazione d'ordine come relazione sul 'contenuto di informazione' degli elementi del dominio, ovvero $a \sqsubseteq b$ se a è meno definito, contiene meno informazioni di b. Data una successione finita $a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq a_n$, l'elemento massimo a_n contiene tutte le informazioni date dagli a_i. In generale un tale elemento non esiste per successioni infinite. I *CPO* rispondono all'esigenza di avere un elemento (estremo superiore) che raccoglie l'informazione fornita da una successione infinita di approssimazioni.
I CPO *algebrici* sono caratterizzati dal fatto che in essi ogni elemento può essere espresso come estremo superiore di un insieme di elementi aventi caratteristiche di 'finitezza'.

Definizione 1.1.1 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un insieme parzialmente ordinato e sia $\emptyset \neq S \subseteq D$.

a. Diremo che S è *diretto* se, per ogni $x, y \in S$, esiste $z \in S$ maggiorante di x e y.

b. Diremo che S è catena se, per ogni $x, y \in S$, $x \sqsubseteq y$ oppure $y \sqsubseteq x$.

Osservazione 1.1.1 Equivalentemente un sottoinsieme S di un insieme parzialmente ordinato $(D, \sqsubseteq)$ si dice una catena se $\sqsubseteq$ ristretta a S è un ordine totale.

Definizione 1.1.2 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un insieme parzialmente ordinato.

a. Diremo che $(D, \sqsubseteq)$ è un *ordine parziale completo* (CPO) se ogni sottoinsieme diretto di D ha estremo superiore in D.

b. Diremo che $(D, \sqsubseteq)$ è un *pointed-CPO* se $(D, \sqsubseteq)$ è un CPO ed ha minimo.

Definizione 1.1.3 Siano A, B due CPO. Diremo che una funzione $f : A \to B$ è *monotona* se, per ogni $x, y \in A$, $x \sqsubseteq_A y$ implica $f(x) \sqsubseteq_B f(y)$.

Definizione 1.1.4 Siano A, B due CPO e sia $f : A \to B$ una funzione monotona. Diremo che f è *continua* se per ogni insieme diretto $S \subseteq A$, $f(\sqcup S) = \sqcup\{f(s) : s \in S\}$.

Osservazione 1.1.2 Osserviamo che la monotonia di f assicura che $\{f(s) : s \in S\}$ è un insieme diretto e dunque garantisce l'esistenza di $\sqcup\{f(s) : s \in S\}$.

Teorema 1.1.1 (Esistenza del Minimo Punto Fisso [Knaster-Tarski]) *Sia D un pointed-CPO e sia $f : D \to D$ una funzione monotona. Allora f ammette minimo punto fisso.*

Osserviamo che il teorema precedente garantisce l'esistenza del minimo punto fisso, ma non ne dà una definizione costruttiva. Rafforzando l'ipotesi su f possiamo colmare questa lacuna.

Teorema 1.1.2 (Esistenza e Struttura del Minimo Punto Fisso) *Sia D un pointed-CPO e sia $f : D \to D$ una funzione continua. Allora f ammette minimo punto fisso:*

$$fix(f) = \sqcup\{f^i(\perp) : i \geq 0\}$$

Definizione 1.1.5 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un CPO.

a. Diremo che $d \in D$ è *compatto* (o *finito*) se, per ogni $S \subseteq D$ diretto, $d \sqsubseteq \sqcup S$ implica $d \sqsubseteq s$, per qualche $s \in S$. Indicheremo con $\mathcal{K}(D)$ l'insieme degli elementi compatti di D.

b. Diremo che D è *algebrico* se, per ogni $d \in D$, $\downarrow d \cap \mathcal{K}(D) = \{x \in \mathcal{K}(D) : x \sqsubseteq d\}$ è diretto e $d = \sqcup \downarrow d \cap \mathcal{K}(D)$.

Teorema 1.1.3 *Siano D ed E due CPO algebrici e sia $f : \mathcal{K}(D) \to \mathcal{K}(E)$ una funzione monotona. Allora l'estensione per continuità di f a D:*

$$f' : D \to E$$
$$f'(x) = \sqcup\{f(d) : d \in \downarrow x \cap \mathcal{K}(D)\}$$

è continua.

1.2 Completamento Ideale

L'operazione di completamento ideale stabilisce una relazione tra preordini e CPO algebrici. Tale operazione, dato un preordine, consente di ottenere un CPO algebrico avente come elementi compatti gli elementi dell'ordine parziale indotto dal preordine.

Definizione 1.2.1 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un preordine.

a. Diremo che $B \subseteq D$ è *chiuso verso il basso* se, per ogni $a \in D$ e $b \in B$, $a \sqsubseteq b$ implica $a \in B$.

b. Diremo che un sottoinsieme $I \subseteq D$ è un *ideale* se è diretto e chiuso verso il basso.

c. Si dice *completamento ideale* di D, denotato con $Idl(D)$, l'insieme degli ideali di D parzialmente ordinato per inclusione.

Proposizione 1.2.1 *Sia $(D, \sqsubseteq)$ un preordine con minimi. Allora:*

a. $Idl(D)$ è un pointed-CPO.

b. gli ideali principali $\downarrow x = \{y \in D \mid y \sqsubseteq x\}$, $x \in D$, sono tutti e soli gli elementi compatti di $Idl(D)$.

c. $Idl(D)$ è un CPO algebrico.

Dim:

(a) Chiaramente l'inclusione è un ordine parziale.
Sia ora $S \subseteq Idl(D)$ diretto, proviamo che $I_S = \cup_{I \in S} I$ è l'estremo superiore di S. Anzitutto dobbiamo provare che I_S è ideale. Se $a \in I_S$ allora $a \in I$, per qualche $I \subseteq S$. Dunque ogni $a' \sqsubseteq a$ appartiene ad I e perciò a I_S. Questo prova che I_S è chiuso verso il basso. Siano allora $a, b \in I_S$, provenienti rispettivamente da I_a e I_b. Poiché S è diretto esiste $I \in S$ contenente I_a e I_b. Dato che I è diretto, esiste $c \in I$ maggiorante di a e di b. Chiaramente $c \in I_S$. Ciò prova che I_S è diretto.
Ovviamente I_S è maggiorante per S. Resta da provare che I_S è minimo tra i maggioranti di S. Sia allora I maggiorante per S, poiché I deve contenere ogni elemento di S, I conterrà anche la loro unione I_S.
Dunque $Idl(D)$ è CPO.
Osserviamo ora che $M = \{\perp \in D : \perp \text{ è minimo in } D\}$ è ideale. Inoltre, poiché ogni $I \in Idl(D)$ è chiuso verso il basso, avremo che $M \subseteq I$, ossia che M è il minimo di $Idl(D)$.

(b) Sia $a \in D$, allora $\downarrow a$ è diretto e chiuso verso il basso, ossia $\downarrow a \in Idl(D)$. Sia ora $S \subseteq Idl(D)$ diretto e $\downarrow a \subseteq \sqcup S$, avremo che $a \in \cup_{I \in S} I$. Dunque, per qualche $I \in S$, $a \in I$. Poiché I è chiuso verso il basso $\downarrow a \subseteq I$, ossia $\downarrow a$ è compatto.
Viceversa se I è compatto, dato che $I = \cup_{x \in I} \downarrow x$, esiste $x \in I$ tale che $I \subseteq \downarrow x \subseteq \cup_{x \in I} \downarrow x = I$, ossia $I = \downarrow x$.

(c) È sufficiente osservare che $I = \cup_{x \in I} \downarrow x = \sqcup_{\downarrow x \subseteq I} \downarrow x$. Concludiamo per (b).

□

Osservazione 1.2.1 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un preordine. Indicata con $\equiv$ la relazione di equivalenza su D indotta da $\sqsubseteq$ ($a \equiv b$ se $a \sqsubseteq b$ e $b \sqsubseteq a$) allora $(D_{/\equiv}, \sqsubseteq_{/\equiv})$, con $\sqsubseteq_{/\equiv}$ definita da $[a] \sqsubseteq_{/\equiv} [b]$ se $a \sqsubseteq b$, è un ordine parziale e

$$(\mathcal{K}(D), \sqsubseteq) \cong (D_{/\equiv}, \sqsubseteq_{/\equiv})$$

Definizione 1.2.2 Sia $(D, \sqsubseteq_D)$ un preordine.

a. Denotiamo con S_D (SC_D) l'insieme delle successioni (crescenti) a valori in D.

b. Definiamo la relazione $\sqsubseteq \subseteq (S_D \times S_D)$ ponendo

$$(x_n)_{n\in N} \sqsubseteq (y_n)_{n\in N} \qquad \text{se e solo se} \qquad \forall n \in N.\exists m \in N.\ x_n \sqsubseteq_D y_m$$

c. Definiamo la relazione $= \subseteq (S_D \times S_D)$ ponendo

$$(x_n)_{n\in N} = (y_n)_{n\in N} \qquad \text{se e solo se} \qquad (x_n)_{n\in N} \sqsubseteq (y_n)_{n\in N} \quad \text{e} \quad (y_n)_{n\in N} \sqsubseteq (x_n)_{n\in N}$$

Osservazione 1.2.2 È banale verificare che $=$ è relazione di equivalenza.
D'ora in avanti, scrivendo S_D (SC_D) intenderemo $S_{D/=}$ ($SC_{D/=}$) ordinato parzialmente dalla relazione $[(x_n)_{n\in N}] \sqsubseteq [(y_n)_{n\in N}]$ se e solo se $(x_n)_{n\in N} \sqsubseteq (y_n)_{y\in N}$.

Teorema 1.2.1 *Sia D un preordine numerabile. Allora $(Idl(D), \sqsubseteq) \cong (SC_D, \sqsubseteq)$.*

Dim:

Diamo solo qualche idea per la dimostrazione, senza entrare nei dettagli, allo scopo di evidenziare alcune proprietà che risulteranno utili nel seguito.
Se D è numerabile ogni suo sottoinsieme è al più tale. Dunque dato un ideale $I \subseteq D$ possiamo ordinare i suoi elementi in una successione $i_1, i_2, \ldots$[2] da cui è semplice ricavare la successione crescente $i_1, i_1 \vee i_2, (i_1 \vee i_2) \vee i_3, \ldots$.
(con $a \vee b$ si indica un maggiorante in I di a e b, che esiste in quanto I è diretto).
Definiamo allora la funzione $f : Idl(D) \to SC_D$ ponendo

$$f(I) = [(i_1, i_1 \vee i_2, (i_1 \vee i_2) \vee i_3, \ldots)]$$

Osserviamo che la definizione è ben data nel senso che è indipendente dall'ordinamento definito sugli elementi di I. Infatti, siano s_1, s_2 due distinti ordinamenti di I e sc_1, sc_2 le relative successioni crescenti. Per ogni $n \in N$, $(sc_1)_n$ è in I, quindi vi è $m \in N$ tale che $(s_2)_m = (sc_1)_n$; si ha dunque chiaramente $(sc_1)_n \sqsubseteq (sc_2)_m$. Quindi $sc_1 \sqsubseteq sc_2$. In modo analogo si prova che $sc_2 \sqsubseteq sc_1$ e quindi $sc_1 = sc_2$.
Si prova facilmente che f è una biezione la cui inversa $f^{-1} : SC_D \to Idl(D)$ è definita:

$$f^{-1}((x^{(n)})_{n\in N}) = \bigcup_{n\in N} \downarrow x^{(n)}$$

Nell'isomorfismo ad un ideale principale $\downarrow x$ corrisponde una successione crescente finita, cioè una successione che dopo un numero finito di passi si 'stabilizza' sul valore x ($(x^{(n)})_{n\in N}$ tale che vi è n_0 per cui $\forall n \geq n_0$ si ha $x^{(n)} = x$).

□

[2] Qualora I fosse costituito da un numero finito di elementi, diciamo n, poniamo $i_m = i_n$ per $m \geq n$.

Capitolo 2

Spazi Metrici

Gli spazi metrici costituiscono una delle strutture matematiche più importanti. In particolare sono alla base della teoria generale dei limiti. Questa teoria ci consentirà di definire un teorema di punto fisso per particolari funzioni (le *contrazioni*) definite su particolari spazi metrici (gli *spazi metrici completi*). Infine, vedremo come limitando l'interesse a opportuni spazi metrici si possono ottenere risultati utili per la soluzione di equazioni di dominio ricorsive.

Definizione 2.0.3 Uno *spazio metrico* è una coppia (M, d), ove M è un insieme non vuoto e $d : M \times M \to R^+$ è una funzione (detta *metrica* o *distanza*) che soddisfa le proprietà

a. $\forall x, y \in M.\ d(x, y) = 0$ *sse* $x = y$

b. $\forall x, y \in M.\ d(x, y) = d(y, x)$

c. $\forall x, y, z \in M.\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definizione 2.0.4 Sia (M, d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_{n \in N}$ una successione in M.

a. $(x_n)_{n \in N}$ si dice *successione di Cauchy* (o *successione fondamentale*) se

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in N. \forall n, m > n_0.\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

b. $(x_n)_{n \in N}$ si dice successione *convergente* se esiste $x \in M$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in N. \forall n > n_0.\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

In tal caso, diremo che $(x_n)_{n \in N}$ converge a x, che x è il *limite* di $(x_n)_{n \in N}$ e scriveremo $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

c. (M, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in M è ivi convergente.

Definizione 2.0.5 Siano (M, d) uno spazio metrico, $A \subseteq M$, $x \in M$ e $r > 0$.

a. Diremo che x è *punto limite* per A se

$$\forall \varepsilon > 0. \exists a \in A.\ 0 < d(a, x) < \varepsilon$$

b. Diremo che A è *chiuso* se contiene tutti i suoi punti limite.

c. Diremo che A è *aperto* se $M \setminus A$ è chiuso.

d. Definiamo *sfera aperta di centro x e raggio r* l'insieme $B(x,r) = \{y \in M : d(x,y) < r\}$.

e. Definiamo *sfera chiusa di centro x e raggio r* l'insieme $\bar{B}(x,r) = \{y \in M : d(x,y) \leq r\}$.

Proposizione 2.0.2 *Sia (M,d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq M$. Allora A è aperto se e solo se per ogni $a \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(a,\varepsilon) \subseteq A$.*

Definizione 2.0.6 Siano (M_1,d_1), (M_2,d_2) spazi metrici, $f : M_1 \to M_2$ una funzione e sia $A > 0$.

a. Diremo che f è *continua* se, per ogni successione convergente $(x_n)_{n\in N} \subseteq M$

$$f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

b. Definiamo l'insieme

$$M_1 \to^A M_2 = \{f : M_1 \to M_2 : \forall x,y \in M_1 . d_2(f(x),f(y)) \leq A \cdot d_1(x,y)\}$$

c. Chiamiamo *non-distance-increasing* (NDI) le funzioni appartenenti a $M_1 \to^1 M_2$. Chiamiamo *contrazioni* le funzioni appartenenti a $M_1 \to^A M_2$, $0 \leq A < 1$.

Proposizione 2.0.3 *Siano (M_1,d_1), (M_2,d_2) spazi metrici, $A > 0$ e sia $f : M_1 \to^A M_2$ una funzione. Allora f è continua.*

Definizione 2.0.7 Siano (M_1,d_1) e (M_2,d_2) spazi metrici. Diremo che una funzione $f : M_1 \to M_2$ è un *isometric embedding* se, per ogni $x,y \in M_1$, $d_2(f(x),f(y)) = d_1(x,y)$. Una tale funzione è chiaramente iniettiva. Se f è anche suriettiva e quindi è una biezione si dice *isometria* e gli spazi M_1 e M_2 sono detti *isometrici*.

Teorema 2.0.2 (Teorema delle Contrazioni [Banach-Cacciopoli]) *Sia (M,d) uno spazio metrico completo e sia $f : M \to M$ una contrazione. Allora esiste un unico punto fisso $fix(f)$ per f in M:*

$$fix(f) = \lim_{n\to+\infty} f^i(x_0) \qquad \text{con } x_0 \in M \text{ qualsiasi}$$

Definizione 2.0.8 Sia (M,d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq M$.

a. Chiamiamo *diametro* di A la grandezza $diam(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$.

b. Diremo che A è *limitato* se $diam(A) < +\infty$.

c. Diremo che A è *totalmente limitato* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ tali che $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$.

Definizione 2.0.9 Siano (M,d) uno spazio metrico, $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di M e sia $A \subseteq M$.

a. Diremo che $\mathcal{F}$ *ricopre* (o che è un *ricoprimento* di) A, se l'unione degli elementi di $\mathcal{F}$ contiene A.

b. Diremo che $\mathcal{F}$ è *ricoprimento finito* di A se $\mathcal{F}$ è finito e ricopre A.

c. Diremo che $\mathcal{F}$ è *ricoprimento aperto* di A se $\mathcal{F}$ ricopre A e ogni elemento di $\mathcal{F}$ è aperto in M.

Definizione 2.0.10 Sia (M, d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq M$. Diremo che A è *compatto per successioni* (o, semplicemente, *compatto*) se ogni successione a valori in A ammette un punto limite in A.

Proposizione 2.0.4 *Sia (M, d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq M$ compatto. Allora A è chiuso.*

Teorema 2.0.3 (Caratterizzazione dei Compatti) *Sia (M, d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq M$. Allora sono equivalenti*

a. A è compatto.

b. A è completo e totalmente limitato.

c. Da ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di A si può estrarre un ricoprimento finito $\mathcal{U}^F$ di A.

Proposizione 2.0.5 *Sia (M, d) uno spazio metrico compatto e sia $A \subseteq M$ chiuso. Allora A è compatto.*

Dim: Ogni successione di A, in quanto successione di M ammette un punto limite x. poiché A è chiuso, $x \in A$.

□

Proposizione 2.0.6 *Sia $\{K_i : i \in I\}$ una famiglia di compatti inclusi non vuoti. Allora $\cap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$*

Proposizione 2.0.7 *Sia $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ una famiglia finita di compatti. Allora $\cup_{1 \leq i \leq n} K_i$ è compatto.*

Dim:

Sia $(s_n)_{n \in N} \subseteq \cup_{1 \leq i \leq n} K_i$ successione. Poiché i compatti sono in numero finito ne esiste uno, diciamo K_i, in cui cadono infiniti punti di $(s_n)_{n \in N}$. Dunque K_i, e perciò $\cup_{1 \leq i \leq n} K_i$, contengono un punto limite della successione considerata.

□

D'ora in avanti considereremo spazi metrici in cui la distanza tra due qualsiasi elementi è superiormente limitata da 1.

Osservazione 2.0.3 Notiamo che se (M, d) è uno spazio compatto, non è limitativa la supposizione che la metrica abbia valori in $[0, 1]$. In caso contrario, infatti, dato che uno spazio M compatto è limitato, detto L il suo diametro la metrica d' definita da

$$d'(x, y) = d(x, y)/L$$

è equivalente a d e soddisfa la proprietà richiesta.

2.1 Spazi Ultrametrici

Nella nostra trattazione riveste una notevole importanza il concetto di *spazio ultrametrico*. In particolare è fondamentale il fatto che in tali spazi due sfere con intersezione non vuota sono una inclusa nell'altra. Questo, come vedremo, consente di 'dimenticare' il centro delle sfere; una sfera in uno spazio ultrametrico può, cioè, essere vista come una coppia (insieme di punti, raggio).

Definizione 2.1.1 Uno spazio metrico (M, d) si dice *ultrametrico* se d soddisfa la proprietà (rafforzamento della disuguaglianza triangolare) :

c$'$. $\forall x, y, z \in M.\ d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$

Notazione 2.1.1 Qualora lo spazio sia ultrametrico è opportuno considerare, per motivi che risulteranno chiari nel seguito, solo le sfere chiuse dello spazio. In tal caso, per semplicità di scrittura, scriveremo $B(a, r)$ in luogo di $\bar{B}(a, r)$.

Proposizione 2.1.1 *Ogni sfera $B(a, r)$ di uno spazio ultrametrico (M, d) è aperta e chiusa.*

Dim:

Sia $a' \in B(a, r) \subseteq M$, allora $d(a', a) \leq r$. Proviamo che $B(a', r) \subseteq B(a, r)$. Qusto segue immediatamente dal fatto che se $a'' \in B(a', r)$ allora $d(a'', a) \leq \max\{d(a'', a'), d(a', a)\} \leq r$. Dunque $B(a, r)$ è aperta.
Inoltre ogni sfera chiusa è un chiuso, per cui si conclude.

□

Proposizione 2.1.2 *Sia (M, d) uno spazio ultrametrico e siano $B(a, r_1)$, $B(b, r_2)$ sfere di M con intersezione non vuota. Allora, se $r_1 \leq r_2$, $B(a, r_1) \subseteq B(b, r_2)$.*

Dim

Sia c appartenente all'intersezione. È sufficiente osservare che se $x \in B(a, r_1)$ allora

$$d(x, b) \leq \max\{d(x, a), d(a, c), d(c, b)\} \leq \max\{r_1, r_1, r_2\} = r_2$$

e quindi $x \in B(b, r_2)$.

□

Corollario 2.1.1 *Sia (M, d) uno spazio ultrametrico e siano $B(a, r)$, $B(b, r)$ sfere di M con intersezione non vuota. Allora $B(a, r) = B(b, r)$.*

2.2 Spazi Ultrametrici Compatti

Le notevoli proprietà degli spazi ultrametrici sono ulteriormente rafforzate qualora lo spazio sia anche compatto. Nel seguito per indicare tali spazi useremo la sigla CUM (Compact Ultrametric Space)

Proposizione 2.2.1 *Sia (M, d) un CUM. Allora è possibile definire una metrica d' su M*

$$d' : M \times M \to \{0\} \cup \{2^{-n} : n \in N\}$$

equivalente a d.

Dim:

La metrica d' può essere definita:

$$d'(x, x) = 0$$
$$d'(x, y) = 2^{-n} \quad \text{con } n \text{ tale che } 2^{-n} \leq d(x, y) < 2^{-(n+1)} \quad se \;\; x \neq y$$

d' è ovviamente una ultrametrica e soddisfa

$$d'(x, y) \leq d(x, y) \leq 2d'(x, y)$$

quindi è equivalente a d.

□

D'ora in poi assumeremo dunque che per ogni CUM (M, d) considerato, la distanza d abbia valori in $\{0\} \cup \{2^{-n} : n \in N\}$

Definizione 2.2.1 Sia (M, d) un CUM. Si indica con $\mathcal{B}_M$ l'insieme di tutte le sfere di M di raggio non nullo, ovvero

$$\mathcal{B}_M = \{B(x, r) : r > 0\}$$

Si osservi che in realtà sono significativi solo i raggi del tipo 2^{-n} con $n \in N$ nel senso che se $2^{-n} \leq r_1, r_2 < 2^{-(n+1)}$ allora, per l'assunzione fatta sui valori di d si ha $B(x, r_1) = B(x, r_2)$. Dunque

$$\mathcal{B}_M = \{B(x, 2^{-n}) : n \in N\}$$

Proposizione 2.2.2 *Sia (M, d) un CUM. Allora ogni sfera (chiusa) $B(x, r)$ è* aperta *e compatta.*

Dim:

È sufficiente osservare che $B(x, r)$ è aperta per l'ultrametricità dello spazio ed è compatta in quanto chiusa in un compatto.

□

Definizione 2.2.2 Sia (M, d) uno spazio metrico, $\emptyset \neq A \subseteq M$ e sia $n \in N$. Si indica con $A[n]$ l'insieme di sfere:

$$A[n] = \{B(x, 2^{-n}) : x \in A\}$$

Proposizione 2.2.3 *Sia (M, d) uno spazio ultrametrico, $\emptyset \neq A \subseteq M$ un insieme compatto e sia $n \in N$. Allora $A[n]$ è finito.*

Dim:

Dato che le sfere chiuse in uno spazio ultrametrico sono aperti, $A[n]$ è un ricoprimento aperto di A. Dunque, essendo A compatto, esiste un sottoricoprimento finito, ovvero esiste $A_F \subseteq A$ tale che $A \subseteq \cup\{B(x, 2^{-n}) : x \in A_F\}$. Ora $\forall x \in A.\exists x' \in A_F$ tale che $x \in B(x', 2^{-n})$, dunque $B(x, 2^{-n}) \cap B(x', 2^{-n}) \neq \emptyset$ per cui, dato che le due sfere hanno lo stesso raggio $B(x, 2^{-n}) = B(x', 2^{-n})$ e quindi $A[n] = \{B(x', 2^{-n}) : x' \in A_F\}$. Questo consente di concludere.

$\square$

Corollario 2.2.1 *Sia (M, d) un CUM. Allora $\mathcal{B}_M$ è* numerabile

Dim:

Osserviamo che

$$\mathcal{B}_M = \cup_{n \in N} M[n]$$

Essendo lo spazio compatto, $M[n]$ è finito per ogni n e quindi $\mathcal{B}_M$ è numerabile.

$\square$

Corollario 2.2.2 *Sia (M, d) un CUM. Allora esiste un sottoinsieme di M* numerabile*, denso in M, ovvero*

$$\exists M' \subseteq M.\ M' \textit{numerabile e } \overline{M'} = M$$

Dim:

Per ogni $n \in N$, essendo M un CUM, esiste un sottoinsieme $M_F^{(n)}$ di M tale che:

$$M = \cup\{B(x, 2^{-n}) : x \in M_F^{(n)}\}$$

Definiamo

$$M' = \cup_{n \in N} M_F^{(n)}$$

Ora $\forall x \in M.\exists x^{(n)} \in M_F^{(n)}$ tale che $x \in B(x^{(n)}, 2^{-n})$ e quindi $d(x, x^{(n)}) \leq 2^{-n}$. Si ottiene così una successione $(x^{(n)})_{n \in N}$ in M' convergente a x. Si conclude quindi che $\overline{M'} = M$.

$\square$

Proposizione 2.2.4 *Sia (M, d) un CUM e sia $(B_i = B(x_i, r_i))_{i \in N}$ una successione decrescente di sfere in $\mathcal{B}_M$ (cioè per ogni $i \in N$ $B(x_i, r_i) \supseteq B(x_{i+1}, r_{i+1})$), con $r_i \to 0$. Allora $(B^{(i)})_{i \in N}$ definisce un punto di M.*

Dim:

Consideriamo $B = \cap_{i \in N} B_i$. Essendo $(B^{(i)})_{i \in N}$ una famiglia di compatti inclusi, B è non vuoto. Inoltre $\forall x, y \in B, \forall i \in N$, dato che $x, y \in B_i$, si ha che $d(x, y) \leq \max\{d(x, x_i), d(y, x_i)\} \leq r_i$ e quindi $d(x, y) = 0$, per cui $x = y$. Dunque $B = \cap_{i \in N} B_i$ è costituito da un unico punto.

$\square$

In conclusione, se (M, d) è un CUM, l'insieme delle sfere di raggio non nullo $\mathcal{B}_M$, da una descrizione 'completa' dello spazio, nel senso che consente di risalire alla topologia $(M, \Omega(M))$. Infatti:

- per ogni aperto $A \in \Omega(M)$

$$A = \cup_{x \in A} B(x, 2^{-n_x}) \quad \text{per opportuni } n_x$$

- per ogni elemento $x \in M$, x è individuato dalla successione di sfere decrescenti $(B(x, 2^{-n}))_{n \in N}$

$$\{x\} = \cap_{n \in N} B(x, 2^{-n})$$

Capitolo 3

Categorie

Uno dei principali motivi che hanno determinato la nascita della *teoria delle categorie* è stata l'esigenza di poter vedere risultati simili, ottenuti in vari ambiti della matematica, come istanze di un'unica, più generale teoria. Proprio questa necessità di raccogliere un vasto insieme di risultati differenti ha portato alla formulazione di una teoria piuttosto astratta. I matematici, dunque, qualche volta, si riferiscono alla teoria delle categorie come ad una 'assurdità astratta', ma allo stesso tempo, regolarmente traggono vantaggio dal potere derivante dalla sua generalità. La teoria delle categorie ha un'influenza notevole sullo studio della semantica dei linguaggi di programmazione e recentemente ha spesso guidato o ispirato la scoperta di concetti, definizioni, strutture e teoremi. La sua validità va spesso oltre quella di una teoria matematica ben sviluppata e generale, nel senso che in molti casi risponde alle esigenze di base dell'informatica molto meglio delle altre teorie fondazionali esistenti.
La teoria delle categorie è un argomento vastissimo; nel seguito saranno introdotte solo le definizioni fondamentali e i risultati che saranno poi utilizzati nella nostra trattazione. In particolare vedremo i concetti di *categoria cartesiana chiusa*, *categorie equivalenti* ed un *teorema di punto fisso* a livello categoriale.

3.1 Categorie, Isomorfismi, Funtori

La definizione di base nella teoria delle categorie è ovviamente quella di categoria. Gli assiomi per le categorie sono piuttosto generali e rappresentano generalizzazioni di assiomi frequentissimi nella matematica e nell'informatica.

Definizione 3.1.1 Una *categoria* $\mathcal{C}$ consiste in

a. Una collezione di *oggetti* $Obj_{\mathcal{C}}$ ed una collezione di *morfismi* $Mor_{\mathcal{C}}$

b. Due operazioni

$$dom : Mor_{\mathcal{C}} \to Obj_{\mathcal{C}}$$
$$cod : Mor_{\mathcal{C}} \to Obj_{\mathcal{C}}$$

Scriveremo $a \xrightarrow{f} b$ se $dom(f) = a$ e $cod(f) = b$ e chiameremo a e b rispettivamente *dominio* e *codominio* di f. Scriveremo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ per indicare la collezione dei morfismi $a \xrightarrow{f} b$.

c. Un'operazione di *composizione* $\circ$, che assegna ad ogni coppia di morfismi f e g con $cod(f) = dom(g)$, un morfismo $g \circ f$, con $dom(g \circ f) = dom(f)$ e $cod(g \circ f) = cod(g)$.
L'operazione di composizione è *associativa* ovvero dati comunque i morfismi $a \xrightarrow{f} b,\ b \xrightarrow{g} c$, $c \xrightarrow{h} d$ vale

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

d. Per ciascun oggetto a un morfismo *identità* id_a tale che per ogni morfismo $a \xrightarrow{f} b$

$$f \circ id_a = f$$
$$id_b \circ f = f$$

Esempio 3.1.1 Una delle categorie più note è la categoria **Set** degli insiemi e delle funzioni totali tra insiemi. Questa categoria ha come oggetti gli insiemi e come morfismi le funzioni (totali) tra insiemi. La composizione di morfismi $\circ$ è definita come l'usuale composizione tra funzioni e il morfismo identità di un oggetto A è la funzione identità sull'insieme A.
Un'altra categoria è **Poset**, avente come oggetti gli insiemi parzialmenti ordinati e come morfismi le funzioni monotone. $\circ$ è l'ordinaria composizione di funzioni e così i morfismi identità sono le identità sugli insiemi associati ai poset.

Vogliamo ora introdurre la nozione di *isomorfismo* tra oggetti in una categoria; questa nozione vuole rappresentare la generalizzazione della nozione di equivalenza tra strutture matematiche. Vedremo che effettivamente considerando esempi di categorie si ottengono concetti già noti.

Definizione 3.1.2 Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Due oggetti a, b in $Obj_{\mathcal{C}}$ si dicono *isomorfi* se vi sono due morfismi $a \xrightarrow{f} b$ e $b \xrightarrow{g} a$ tali che

$$g \circ f = id_a$$
$$f \circ g = id_b$$

In tal caso si scrive $a \cong b$ e i morfismi f e g si dicono *isomorfismi*.

Esempio 3.1.2 Nella categoria **Set** gli isomorfismi sono le funzioni biettive. In **Poset** si ottiene invece l'usuale nozione di isomorfismo tra strutture ordinate.

Definizione 3.1.3 Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Un oggetto a in $Obj_{\mathcal{C}}$ si dice *oggetto terminale* se per ogni altro oggetto b se vi è un unico morfismo $b \xrightarrow{f} a$.

Osservazione 3.1.1 In una categoria $\mathcal{C}$ l'oggetto terminale, se esiste, è unico, a meno di isomorfismi, ovvero se a e b sono due oggetti terminali di $\mathcal{C}$ allora $a \cong b$. Parleremo dunque di 'oggetto terminale della categoria' e lo indicheremo con $1_{\mathcal{C}}$, intendendo in questo modo uno qualunque degli oggetti terminali isomorfi.

Definizione 3.1.4 Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Un oggetto a in $Obj_{\mathcal{C}}$ si dice *oggetto iniziale* se per ogni altro oggetto b se vi è un unico morfismo $a \xrightarrow{f} b$.

Osservazione 3.1.2 In una categoria $\mathcal{C}$ anche l'oggetto iniziale, se esiste, è unico, a meno di isomorfismi.

Esempio 3.1.3 Nella categoria **Set** vi è un unico oggetto iniziale, e cioè l'insieme vuoto $\emptyset$. Ogni insieme singoletto, costituito da un unico elemento $\{x\}$ è invece oggetto terminale in **Set**. È chiaro che tutti gli insiemi singoletto sono tra loro isomorfi (l'isomorfismo è l'unica funzione tra i due insiemi).

La nozione di *funtore* vuole formalizzare il concetto di mappa tra categorie che preserva la struttura delle stesse. I funtori rivestono dunque un ruolo fondamentale nella definizione di categorie isomorfe ed equivalenti.

Definizione 3.1.5 Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un *funtore* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un'operatore che:

- ad ogni oggetto a in $Obj_{\mathcal{C}}$ associa un oggetto $F(a)$ in $Obj_{\mathcal{C}}$
- ad ogni morfismo f in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ associa un morfismo $F(f)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(a), F(b))$

soddisfacente le seguenti proprietà:

a. $F(id_a) = id_{F(a)}$ per ogni oggetto a

b. $F(g \circ f) = f(g) \circ F(f)$ per ogni coppia di morfismi f in $Hom(a, b)$, g in $Hom(b, c)$

Definizione 3.1.6 Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ categorie siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtori. Si definisce *composizione* di F e G il funtore $G \circ F$ definito da:

- $(G \circ F)(a) = G(F(a))$ per ogni oggetto a in $Obj_{\mathcal{C}}$
- $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ per ogni morfismo f in $Mor_{\mathcal{C}}$

(si verifica facilmente che $G \circ F$ così definito è un funtore).

Esempio 3.1.4 Un funtore nella categoria **Set** è l'operazione *insieme potenza* $\mathcal{P}$ che ad ogni insieme A associa l'insieme delle parti di A e ad ogni funzione f, la funzione stessa estesa ad insiemi ($\mathcal{P}(f)(S) = \{f(s) : s \in S\}$).

3.2 Isomorfismo ed Equivalenza di Categorie

Lo scopo di questa sezione è quello di specificare quando due categorie possono essere considerate 'essenzialmente uguali'. La prima e più immediata nozione è quella di isomorfismo di categorie. Tale nozione risulta però chiaramente molto più forte di quello che normalmente si vorrebbe, essenzialmente perché non tiene conto della presenza di isomorfismi 'interni' alle categorie. Si introduce dunque una nozione più debole, che è quella che poi sarà effettivamente utilizzata, cioè la nozione di equivalenza di categorie.

Definizione 3.2.1 Due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si dicono *isomorfe* se esistono due funtori $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tali che

- $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$
- $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$

Come premesso la definizione di isomorfismo è indebolita in quella di equivalenza, essenzialmente richiedendo che l'isomorfismo tra le categorie valga 'modulo isomorfismi interni'; per formalizzare questa nozione è però necessario premettere alcune considerazioni.

Osservazione 3.2.1 Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Osserviamo in primo luogo che la relazione di isomorfismo $\cong_O$ tra oggetti è una relazione di equivalenza su $Obj_{\mathcal{C}}$.
Inoltre la relazione $\cong_M$ sui morfismi definita nel modo seguente:

$f \cong_M g$ se vi sono due isomorfismi i_1, i_2 tali che $f = i_1 \circ g \circ i_2$

è anch'essa una relazione di equivalenza.

Definizione 3.2.2 Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Si definisce la *categoria scheletro* di $\mathcal{C}$, indicata con $SK(\mathcal{C})$, la categoria definita nel modo seguente:

a. La collezione degli oggetti è $Obj_{\mathcal{C}/\cong_O}$ e quella dei morfismi è $Mor_{\mathcal{C}/\cong_M}$

b. $dom_{SK(\mathcal{C})}([f]) = [dom_{\mathcal{C}}(f)]$
$cod_{SK(\mathcal{C})}([f]) = [cod_{\mathcal{C}}(f)]$

c. L'operazione di composizione definita da $[g] \circ [f] = [g \circ f]$

d. Per ciascun oggetto $[a]$ il morfismo identità è definito $id_{[a]} = [id_a]$

Osservazione 3.2.2 Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Si verifica facilmente che la struttura $SK(\mathcal{C})$ è ben definita ed è una categoria.
Inoltre siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie e sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore. Allora è possibile definire un funtore:

$$SK(F) : SK(\mathcal{C}) \to SK(\mathcal{D})$$

nel modo seguente

$SK(F)([a]) = [F(a)]$ per ogni oggetto a in $Obj_{\mathcal{C}}$
$SK(F)([f]) = [F(f)]$ per ogni morfismo f in $Mor_{\mathcal{C}}$

Infatti $SK(F)$ è ben definito, cioè la definizione non dipende dal rappresentante nella classe di equivalenza: se $a \cong_O b$ allora, dato che l'immagine tramite F di un isomorfismo è ancora un isomorfismo, $F(a) \cong_O F(b)$ e quindi $[F(a)] = [F(b)]$. Allo stesso modo se $f \cong_M g$ allora $[F(f)] = [F(g)]$.
Inoltre soddisfa la definizione di funtore:

a. commutatività rispetto alla composizione

$$\begin{aligned}
&SK(F)([g] \circ [f]) = \\
&\quad = SK(F)([g \circ f]) = \\
&\quad = [F(g \circ f)] = \\
&\quad = [F(g) \circ F(f)] = \\
&\quad = [F(g)] \circ [F(f)] = \\
&\quad = SK(F)([f]) \circ SK(F)([g])
\end{aligned}$$

b. commutatività rispetto all'identità

$$\begin{aligned}
&SK(F)(id_{[a]}) = \\
&\quad = SK(F)([id_a]) = \\
&\quad = [F(id_a)] = \\
&\quad = [id_{F(a)}] = \\
&\quad = id_{[F(a)]} = \\
&\quad = id_{SK(F)([a])}
\end{aligned}$$

Possiamo quindi finalmente dare la definizione di categorie equivalenti:

Definizione 3.2.3 Due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si dicono *equivalenti* se le corrispondenti categorie scheletro $SK(\mathcal{C})$ e $SK(\mathcal{D})$ sono isomorfe.

3.3 Un Teorema di Punto Fisso per le Categorie

Nei capitoli precedenti sono stati analizzati risultati di punto fisso per gli spazi metrici e per gli insiemi ordinati. Accade cioè che data una funzione f (tra spazi metrici o insiemi ordinati), sotto certe condizioni, esista un elemento x del dominio tale che $f(x) = x$. Tale elemento viene detto *punto fisso* di della funzione f.
Vogliamo ora provare un risultato simile a livello categoriale, ovvero si vuole mostrare che se $\mathcal{C}$ è una categoria e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è un funtore, quando sono verificate certe ipotesi esiste un 'punto fisso' per F, cioè un oggetto a della categoria tale che $F(a) \cong a$.
L'utilità di un tale risultato è legata al fatto che, se gli oggetti della categoria sono usati come domini semantici per un linguaggio di programmazione, allora un dominio ricorsivo (cioè definito in termini di sé stesso) può essere pensato come punto fisso di un opportuno endofuntore F nella categoria.

Definizione 3.3.1 (Torre) Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Si dice *torre* in $\mathcal{C}$ una successione $(a_n, f_n)_{n\in N}$ di oggetti e morfismi tale che per ogni n si ha $a_n \overset{f_n}{\to} a_{n+1}$

Definizione 3.3.2 (Cono) Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $(a_n, f_n)_{n\in N}$ una torre in $\mathcal{C}$. Si dice *cono* per la torre una coppia $(a, (\gamma_n)_{n\in N})$, con a oggetto, γ_n morfismo $a_n \overset{\gamma_n}{\to} a$, tale che

$$\forall n \in N.\ \gamma_n = \gamma_{n+1} \circ f_n$$

$$
\begin{tikzcd}
a_{n+1} \arrow[r, "\gamma_{n+1}"] & a \\
a_n \arrow[u, "f_n"] \arrow[ur, "\gamma_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

Definizione 3.3.3 (Cono Iniziale) Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Un cono $(a, (\gamma_n)_{n \in N})$ per una torre $(a_n, f_n)_{n \in N}$ si dice *cono iniziale* per la torre se per ogni altro cono $(a', ({\gamma'}_n)_{n \in N})$ per tale torre esiste un unico morfismo $f : a \to a'$ tale che $\forall n \in N.\ {\gamma_n}' = f \circ \gamma_n$.

$$
\begin{tikzcd}
 & a' \\
a_n \arrow[ur, "{\gamma_n}'"] \arrow[r, "\gamma_n"'] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per provare il teorema di punto fisso:

Teorema 3.3.1 (Teorema di Punto Fisso Categoriale) *Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtore. Sia $a_0 \overset{f_0}{\to} Fa_0$ un morfismo in $\mathcal{C}$. Definiamo la torre $(a_n, f_n)_{n \in N}$ nel modo seguente: $\forall n \in N$*

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= Fa_n \\
f_{n+1} &= Ff_n
\end{aligned}
$$

Se tale torre ha un cono iniziale $(a, (\gamma_n)_{n \in N})$ e $(Fa, (F\gamma_n)_{n \in N})$ è un cono iniziale per la torre $(Fa_n, Ff_n)_{n \in N}$ allora

$$a \cong Fa$$

Dim:

Osserviamo che $(Fa_n, Ff_n)_{n \in N} = (a_{n+1}, f_{n+1})_{n \in N}$, dunque $(a, (\gamma_n)_{n \in N})$ e $(Fa, (F\gamma_n)_{n \in N})$ sono entrambi coni iniziali per la torre $(a_{n+1}, f_{n+1})_{n \in N}$.
Pertanto, per la definizione di cono iniziale esistono unici i morfismi

$$
\begin{aligned}
&a \overset{g_1}{\to} Fa \\
&Fa \overset{g_2}{\to} a
\end{aligned}
$$

tali che $\forall n \in N$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{n+1} &= g_2 \circ F\gamma_n \\
F\gamma_n &= g_1 \circ \gamma_{n+1}
\end{aligned}
$$

Dunque

$$\gamma_{n+1} = g_2 \circ F\gamma_n = g_2 \circ g_1 \circ \gamma_{n+1} \tag{1}$$

$$F\gamma_n = g_1 \circ \gamma_{n+1} = g_1 \circ g_2 \circ F\gamma_n \tag{2}$$

Ora, sempre per definizione di inizialità, applicata ad a solamente, esiste un unico morfismo $a \xrightarrow{g} a$ tale che $\forall n.\ \gamma_{n+1} = g \circ \gamma_{n+1}$ e questa è necessariamente l'identità di a, id_a. Dunque dalla relazione (1) segue che:

$$g_2 \circ g_1 = id_a$$

Ragionando allo stesso modo si conclude che

$$g_1 \circ g_2 = id_{Fa}$$

e quindi come si voleva dimostrare $a \cong Fa$.

□

3.4 Categorie Cartesiane Chiuse

La nozione di *categoria cartesiana chiusa* rappresenta la principale connessione tra la teoria delle categorie e le applicazioni informatiche di tale teoria, in quanto trasferisce a livello categoriale i concetti di *applicazione* e *astrazione*.

Il primo passo consiste nell'introduzione del *prodotto*, che rappresenta una generalizzazione categoriale dell'operatore $\times$ che si incontra in vari ambiti della matematica.

Definizione 3.4.1 Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Il *prodotto* di una coppia di oggetti a e b in $Obj_{\mathcal{C}}$ è un oggetto $a \times b$ e una coppia di morfismi *fst* e *snd*, detti *proiezioni*, tali che, per ogni coppia di morfismi $c \xrightarrow{f} a$ e $c \xrightarrow{g} b$ esiste un'unico morfismo $< f, g >$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "snd"'] \arrow[dr, "f"] & \\
a \times b \arrow[rr, "< f, g >"] & & c \\
& b \arrow[ul, "fst"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Dati due morfismi $a \xrightarrow{f} b$ e $a' \xrightarrow{f'} b'$ definiamo un morfismo:

$$f \times f' = < f \circ fst, f' \circ snd >: a \times a' \to b \times b'$$

Esempio 3.4.1 Nella categoria **Set** il prodotto di due oggetti (insiemi) A e B è il prodotto cartesiano di A e B, con i morfismi *fst* e *snd* definiti:

$$fst((a,b)) = a$$
$$snd((a,b)) = b$$

Si prova facilmente che il prodotto in una categoria è unico a meno di isomorfismi, ovvero vale:

Proposizione 3.4.1 *Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano a e b oggetti in* $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$. *Se $a \times b$ è un prodotto con proiezioni* $\mathrm{fst}, \mathrm{snd}$ *e $a \times' b$ è un prodotto con proiezioni* $\mathrm{fst}', \mathrm{snd}'$ *allora $a \times b \cong a \times' b$.*

Definizione 3.4.2 Si dice *categoria con prodotti finiti* una tripla $(\mathcal{C}, \times, 1)$, dove $\mathcal{C}$ è una categoria con oggetto terminale 1, tale che per ogni coppia di oggetti a e b in $Obj_{\mathcal{C}}$ esiste nella categoria un prodotto $a \times b$.

In una categoria con prodotti finiti, l'oggetto terminale 1 è l'elemento unitario per il prodotto nel senso che per ogni oggetto a vale $1 \times a \cong a \times 1 \cong a$. Questo suggerisce una generalizzazione del prodotto a n-ple di oggetti nel modo seguente:

Definizione 3.4.3 Sia $(\mathcal{C}, \times, 1)$ una categoria con prodotti finiti. Il prodotto per n-ple di oggetti è definito induttivamente nel modo segente:

$$\times() = 1$$
$$\times(a) = 1 \times a$$
$$\times(a_1, \ldots a_{n+1}) = \times(a_1, \ldots a_n) \times a_{n+1} \quad \forall n \in N$$

Vogliamo ora introdurre il corrispondente categoriale dello spazio delle funzioni. In alcune categorie accade che la collezione dei morfismi tra due oggetti a e b, cioè Hom(a,b) possa essere visto a sua volta come un oggetto della categoria. Ad esempio nella categoria **Set**, l'insieme delle funzioni di un insieme A in un insieme B è sua volta un insieme B^A. Un esempio più interessante si ha nella categoria **Poset** nella quale la collezione delle funzioni monotone tra due poset $(A, \sqsubseteq_A)$ e $(B, \sqsubseteq_B)$ è un insieme parzialmente ordinato con la relazione $\sqsubseteq$ definita da $f \sqsubseteq g$ se $\forall x \in A.\ f(x) \sqsubseteq_B g(x)$.
Ora la caratterizzazione categoriale del prodotto si basa sulla definizione degli operatori di base ($\times$ e proiezioni) e delle loro proprietà. Nel caso delle funzioni gli operatori fondamentali sono l'*applicazione* che data una funzione $f : A \to B$ ed un argomento $a \in A$ fornisce il valore di f applicata ad a ($f(a) \in B$), e l'operazione di *curry*, che data una funzione $f : A \times B \to C$ ed un elemento $a \in A$ fornisce una funzione $f_a : B \to C$ tale che $\forall b \in B.\ f_a(b) = f(a,b)$. Queste considerazioni portano alle seguente:

Definizione 3.4.4 Sia $\mathcal{C}$ una categoria con prodotto $\times$ e siano b e c due oggetti. Un *esponenziale* di b in c è un oggetto $b \Rightarrow c$ e un morfismo *apply* tale che per ogni oggetto a ed ogni morfismo $a \times b \xrightarrow{f} c$ vi è un unico morfismo *curry*(f) che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
& c \\
a \times b \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "curry(f) \times id_b"'] & (b \Rightarrow c) \times b \arrow[u, "apply"']
\end{tikzcd}$$

Esempio 3.4.2 Nella categoria **Set** l'esponenziale di due oggetti (insiemi) B e C è l'insieme delle funzioni di B in C, cioè C^B, con la funzione di applicazione definita da:

$$apply(f, x) = f(x)$$

e data una funzione $f : A \times B \to C$ il morfismo $curry(f)$ definito:

$$curry(f)(x)(y) = f(x, y)$$

Si verifica facilmente che, come il prodotto, anche l'esponenziale è unico a meno di isomorfismi.

Definizione 3.4.5 Si dice *categoria cartesiana chiusa* una quadrupla $(\mathcal{C}, \Rightarrow, \times, 1)$, dove $(\mathcal{C}, \times, 1)$ è una categoria con prodotti finiti tale che per ogni coppia di oggetti a e b esiste nella categoria un esponenziale $a \Rightarrow b$.

Parte II

Risultati

Capitolo 4

CUM e $\mathcal{BT}$-alberi

4.1 CUM e Alberi di Sfere

Sia (M, d) un CUM. Consideriamo l'insieme delle sfere di M, con raggio non nullo, ordinato mediante l'inclusione inversa, cioè $(\mathcal{B}_M, \supseteq)$. Il suo *completamento ideale*

$$(Idl(\mathcal{B}_M, \supseteq), \subseteq)$$

è un *pointed-CPO algebrico*, con elementi compatti $\mathcal{K}(Idl(\mathcal{B}_M, \supseteq)) = \{\downarrow B : B \in \mathcal{B}_M\}$. Ora essendo $\mathcal{B}_M$ numerabile, per il teorema 1.2.1

$$Idl(\mathcal{B}_M, \supseteq) \cong SC_{(\mathcal{B}_M, \supseteq)}$$

e nell'isomorfismo un elemento compatto del completamento ideale, $\downarrow B$ con $B \in \mathcal{B}_M$, corrisponde a una successione finita che si stabilizza sul valore B, cioè $(B^{(n)})_{n\in N}$ tale che $\exists n_0 \in N.\ \forall n \geq n_0.\ B^{(n)} = B$.

Proposizione 4.1.1 *Sia (M, d) un CUM e siano $x_1, x_2 \in M$, $r_1, r_2 > 0$. Se $B(x_1, r_1) \supseteq B(x_2, r_2)$ allora $B(x_1, r_1) = B(x_2, r_1)$*

Dim:

Si osservi che $x_2 \in B(x_1, r_1)$, dunque $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_1) \neq \emptyset$, pertanto, dato che le sfere hanno lo stesso raggio, per le proprietà degli spazi ultrametrici coincidono.

$\square$

Continuiamo con una proposizione che mostra come le successioni di sfere in $SC_{\mathcal{B}_M}$ possono essere pensate centrate in uno stesso punto dello spazio.

Proposizione 4.1.2 *Sia (M, d) un CUM e sia $(B^{(i)} = B(x_i, r_i))_{i\in N}$ una successione in $SC_{\mathcal{B}_M}$. Allora $\exists x \in M$ tale che $(B^{(i)})_{i\in N} = (B(x, r_i))_{i\in N}$.*

Dim:

È sufficiente osservare che $\forall i \in N.\ B^{(i)} \supseteq B^{(i+1)}$, dunque $(B^{(i)})_{i\in N}$ è una successione di compatti non vuoti inclusi e quindi l'intersezione di tutte le sfere è non vuota. Sia $x \in \cap_{i\in N} B^{(i)}$. Ora $\forall i.\ x \in B^{(i)}$ e quindi $B^{(i)} = B(x, r_i)$. Si conclude perciò che $(B^{(i)})_{i\in N} = (B(x, r_i))_{i\in N}$.

$\square$

La proposizione che segue mostra che due successioni di sfere in $SC_{\mathcal{B}_M}$, in relazione, possono essere pensate centrate in uno stesso punto dello spazio.

Proposizione 4.1.3 *Sia* (M, d) *un* CUM *e siano* $(B(x, r_i))_{i\in N} \sqsubseteq (B(y, r_j{}'))_{j\in N}$ *due successioni in* $SC_{\mathcal{B}_M}$. *Allora* $(B(x, r_i))_{i\in N} = (B(y, r_i))_{i\in N}$

Dim:

Per definizione di ordine nell'insieme delle successioni si ha che:

$$\forall i.\exists j.\ B(x, r_i)) \supseteq B(y, r_j{}')$$

dunque $\cap_{i\in N} B(x, r_i) \supseteq \cap_{j\in N} B(y, r_j{}') \supseteq \{y\}$. Quindi $y \in B(x, r_i)\ \forall i$ e pertanto $B(x, r_i) = B(y, r_i)$, per cui si conclude.

$\square$

Proposizione 4.1.4 *Sia* (M, d) *un* CUM. *Allora gli elementi massimali di* $SC_{\mathcal{B}_M}$ *sono:*

$$Max(SC_{\mathcal{B}_M}) = \{(B(x, 2^{-i}))_{i\in N} : x \in M\}$$

Dim:

In primo luogo osserviamo che effettivamente le successioni $(B(x, 2^{-i}))_{i\in N}$ sono elementi massimali. Se $(B(x, 2^{-i}))_{i\in N} \sqsubseteq (B(x, r_i))_{i\in N}$ (per le osservazioni precedenti la forma della successione di destra non è particolare) allora $\forall i.\exists j$ tale che $2^{-j} \leq r_i$ e quindi $B(x, r_i) \supseteq B(x, 2^{-j})$. Quindi $(B(x, r_i))_{i\in N} \sqsubseteq (B(x, 2^{-i}))_{i\in N}$ e pertanto le due successioni sono equivalenti.

Inoltre ogni elemento massimale è della forma $(B(x, 2^{-i}))_{i\in N}$. Infatti sia $(B(x, r_i))_{i\in N}$ massimale. Si verifica facilmente che $(B(x, r_i))_{i\in N} \sqsubseteq (B(x, 2^{-i}))_{i\in N}$ e quindi le due successioni sono equivalenti.

$\square$

Corollario 4.1.1 *Sia* (M, d) *un* CUM. *Allora esiste una biezione*

$$f : M \to Max(SC_{\mathcal{B}_M})$$

Dim:

Una successione massimale in $SC_{\mathcal{B}_M}$ è del tipo $(B(x, 2^{-i}))_{i\in N}$ per qualche $x \in M$. Un elemento massimale è cioè una successione di sfere incluse con raggio tendente a zero, che, per i risultati precedenti individua univocamente il punto $x \in M$.
La biezione f può dunque essere definita:

$$f(x) = (B(x, 2^{-i}))_{i\in N}$$

$\square$

Osserviamo che $(\mathcal{B}_M, \supseteq)$ è un albero *finitamente ramificato*; la *radice* è la sfera di raggio 1 e centro qualunque. Per ogni sfera B di raggio 2^{-n}, gli eventuali *figli* sono le sfere in $B[n+1] \setminus \{B\}$. Si osservi che può accadere che $B[n + 1] = \{B\}$, cioè per far si che la sfera si suddivida in più

sfere distinte bisogna diminuire ulteriormente il raggio; non esiste quindi una corrispondenza tra livelli dell'albero e raggio delle sfere. Ogni *foglia* di tale albero sarà una sfera contenente un solo elemento $B = \{x\}$.
Vi possono infine essere dei *cammini infiniti*; le sfere in un cammino di questo tipo rappresentano una successione decrescente di sfere incluse $(B(x, 2^{-i}))_{i \in N}$ che individua univocamente un punto x dello spazio. L'operazione di completamento ideale corrisponde essenzialmente ad aggiungere le foglie ai cammini infiniti.

In conclusione, quindi, la struttura ordinata $(\mathcal{B}_M, \supseteq)$ sembra contenere informazioni che consentono di risalire allo spazio di partenza. In realtà tale struttura dà una descrizione completa dello spazio dal punto di vista topologico, ma non dal punto di vista metrico. Il fatto che non esista una corrispondenza tra livelli dell'albero e raggio delle sfere è un problema non trascurabile, nel senso che può comportare una perdita fatale di informazione sulle distanze tra i punti dello spazio, come evidenziato dal seguente esempio.

Esempio 4.1.1 Si considerino i CUM:

- $M_1 = \{a, b, c\}$
  d_1 definita da $d_1(a, c) = d_1(b, c) = 1,\ d_1(a, b) = 1/2$
- $M_2 = \{a, b, c\}$
  d_2 definita da $d_2(a, c) = d_2(b, c) = 1,\ d_2(a, b) = 1/4$

Gli alberi di sfere corrispondenti sono uguali, ma, come è facile verificare, i due spazi non sono isometrici.

Per risolvere questo problema ed avere una corrispondenza tra *raggio* della sfera e *livello* in cui essa si trova nell'albero è però necessario considerare *sfere formali*, cioè mantenere distinte sfere che pur contenendo gli stessi punti, hanno raggi diversi.

Sia (M, d) un CUM. Consideriamo l'insieme $\mathcal{S}_M$ definito nel modo seguente:

$$\mathcal{S}_M = \{B^F(x, n) : x \in M, n \in N\}$$

Su $\mathcal{S}_M$ definiamo la relazione $\sqsubseteq_{\mathcal{S}_M}$

$$B^F(x_1, n_1) \sqsubseteq_{\mathcal{S}_M} B^F(x_2, n_2) \quad \text{se } B(x_1, 2^{-n_1}) \cap B(x_2, 2^{-n_2}) \neq \emptyset \text{ e } n_1 \leq n_2$$

Si verifica facilmente che $(\mathcal{S}_M, \sqsubseteq_{\mathcal{S}_M})$ è un *preordine*. Indichiamo con $\equiv$ la relazione di equivalenza su $\mathcal{S}_M$, defnta da:

$$B^F(x_1, n_1) \equiv B^F(x_2, n_2) \quad \textit{se } B^F(x_1, n_1) \sqsubseteq_{\mathcal{S}_M} B^F(x_2, n_2) \ \textit{ e } \ B^F(x_2, n_2) \sqsubseteq_{\mathcal{S}_M} B^F(x_1, n_1)$$

A questo punto:

Definizione 4.1.1 Sia (M, d) un CUM. Si dice *albero delle sfere formali (FBT)* di M l'insieme parzialmente ordinato:

$$\mathcal{B}_M^F = (\mathcal{S}_{M/\equiv}, \sqsubseteq_{\mathcal{S}_M})$$

dove $\sqsubseteq_{\mathcal{S}_M}$ è la relazione indotta dalla relazione del preordine.

Gli elementi di $\mathcal{S}_{M/\equiv}$ sono dunque classi di sfere formali; più precisamente $[B^F(x,n)] = \{B^F(y,n) : y \in B(x, 2^{-n})\}$. Per semplicità di notazione, nel seguito scriveremo $B^F(x,n)$ per indicare la corrispondente classe di equivalenza.

Si provano per $\mathcal{B}_M^F$ risultati analoghi a quelli visti per $\mathcal{B}_M$. Le dimostrazioni delle proposizioni che seguono sono omesse in quanto del tutto uguali a quelle delle corrispondenti proposizioni su $\mathcal{B}_M$.

Proposizione 4.1.5 *Sia* (M,d) *un* CUM *e siano* $x_1, x_2 \in M, n \in N$. *Se* $d(x_1,x_2) \leq 2^{-n}$ *allora* $B^F(x_1,n) = B^F(x_2,n)$

Proposizione 4.1.6 *Sia* (M,d) *un* CUM *e siano* $B^F(x_1,n_1), B^F(x_2,n_2) \in \mathcal{B}_M^F$. *Se* $B^F(x_1,n_1) \sqsubseteq B^F(x_2,n_2)$ *allora* $B^F(x_1,n_1) = B^F(x_2,n_1)$

Proposizione 4.1.7 *Sia* (M,d) *un* CUM *e sia* $(B^{(i)} = B^F(x_i,n_i))_{i \in N}$ *una successione crescente in* $\mathcal{B}_M^F$. *Allora* $\exists x \in M$ *tale che* $(B^{(i)})_{i\in N} = (B^F(x,n_i))_{i\in N}$.

Proposizione 4.1.8 *Sia* (M,d) *un* CUM *e siano* $(B^F(x,n_i))_{i\in N} \sqsubseteq (B^F(y,m_j))_{j\in N}$ *due successioni crescenti in* $\mathcal{B}_M^F$. *Allora* $(B^F(x,n_i))_{i\in N} = (B^F(y,n_i))_{i\in N}$

4.2 $\mathcal{BT}$-alberi

In questa sezione si introduce la nozione di $\mathcal{BT}$*-albero*, che consentirà di precisare la corrispondenza tra CUM e alberi, messa in evidenza nella precedente sezione. La nozione di $\mathcal{BT}$*-albero* vuole formalizzare l'idea intuitiva di albero finitamente ramificato privo di foglie, nel quale, cioè ogni cammino dalla radice può continuare indefinitamente.

Definizione 4.2.1 Un insieme parzialmente ordinato $(D, \sqsubseteq)$ si dice un $\mathcal{BT}$*-albero* se soddisfa le seguenti condizioni:

a. ha minimo $\perp_D$

b. $\forall d_1, d_2, d \in D$ se $d_1 \sqsubseteq d$ e $d_2 \sqsubseteq d$ allora $d_1 \sqsubseteq d_2$ oppure $d_2 \sqsubseteq d_1$

c. $\forall d \in D \downarrow d$ è finito

d. $\forall d \in D$ *Succ*(d) è non vuoto e finito

Continuiamo evidenziando alcune proprietàdei $\mathcal{BT}$*-alberi*, che risulteranno utili nel seguito.

Definizione 4.2.2 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un $\mathcal{BT}$*-albero*. Si definisce allora:

- $D^{(0)} = \{\perp_D\}$
- $D^{(i+1)} = \cup\{Succ(d) : d \in D^{(i)}\}$

Osservazione 4.2.1 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un $\mathcal{BT}$*-albero.* Per la proprietà d della definizione, ogni $D^{(i)}$ è finito. Inoltre dalla proprietà c segue immediatamente che

$$D = \cup_{i=0}^{\infty} D^{(i)}$$

e quindi D è *numerabile.* Per ogni elemento $d \in D$ definiamo $level(d) = i$ con i tale che $d \in D^{(i)}$.

Proposizione 4.2.1 *Sia* $(D, \sqsubseteq)$ *un* $\mathcal{BT}$-albero. *Valgono allora le seguenti proprietà:*

1. *Ogni sottoinsieme* $S \subseteq D$ *diretto è una catena*
2. *Sia* $I \subseteq D$ *un ideale. Allora, essendo diretto,* I *è una catena e*
   (a) I *è finito sse* $\exists d \in D$ *tale che* $I = \downarrow d$
   (b) I *è infinito sse* I *è una catena massimale*

Dim:

1. $\forall d_1, d_2 \in S$, essendo S diretto $\exists d \in S$ tale che $d_1 \sqsubseteq d$ e $d_2 \sqsubseteq d$ e quindi per la proprietà b dei $\mathcal{BT}$*-alberi*, $d_1 \sqsubseteq d_2$ oppure $d_1 \sqsubseteq d_2$
2. Sia I ideale,
   (a) Se I è finito allora, essendo un ideale è una catena finita per cui ha massimo d e quindi, essendo I chiuso verso il basso, $I = \downarrow d$.
   Viceversa, se vi è un elemento $d \in D$ tale che $I = \downarrow d$ allora I è un ideale (principale) finito, per la proprietà c dei $\mathcal{BT}$*-alberi.*
   (b) Se I è infinito allora I è una catena infinita ed è massimale. Infatti se vi fosse $d' \in D - I$ tale che $I \cup \{d'\}$ è una catena, allora $\forall d \in I$ sicuramente $d \sqsubseteq d'$ (non può essere il contrario altrimenti, essendo I chiuso verso il basso, si avrebbe $d' \in I$) e quindi $I \subseteq \downarrow d$ finito, assurdo.
   Viceversa, sia I catena massimale. Allora I è certamente infinito. Se non lo fosse avrebbe massimo d e quindi scelto $d' \in Succ(d)$ si avrebbe $I \cup \{d'\}$ catena contenente propriamente I, contro la massimalità di I stesso.

I risultati precedenti ci consentono di dare una caratterizzazione interessante del completamento ideale di un $\mathcal{BT}$*-albero.* Sostanzialmente il completamento ideale si ottiene aggiungendo a ciascun cammino infinito dell'albero una foglia che rappresenta il sup del cammino.

Definizione 4.2.3 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un $\mathcal{BT}$*-albero.* Si dice *chiusura* di D l'insieme parzialmente ordinato $(D^\omega, \sqsubseteq^\omega)$, definito da

$$D^\omega = D \cup \mathcal{C}_D$$

dove $\mathcal{C}_D$ è l'insieme delle catene massimali in D e

$$\sqsubseteq^\omega = \sqsubseteq \cup \{(d, C) : d \in D, C \in \mathcal{C}_D, d \in C\} \cup \{(C, C) : C \in \mathcal{C}_D\}$$

Proposizione 4.2.2 *Sia* $(D, \sqsubseteq)$ *un* $\mathcal{BT}$-albero. *Allora*

$$(Idl(D), \subseteq) \cong (D^\omega, \sqsubseteq^\omega)$$

Dim: Definiamo la funzione:

$$f : Idl(D) \to D^\omega$$
$$f(I) = \begin{cases} d & \text{se } I \text{ è finito, } I = \downarrow d,\ d \in D \\ I & \text{se } I \text{ è infinito} \end{cases}$$

per la proposizione precedente f è ben definita ed è una biezione.

Proviamo che f è un isomorfismo. Siano $I_1, I_2 \in Idl(D)$ due ideali e sia $I_1 \subseteq I_2$. Se I_1 è infinito, allora è una catena massimale, quindi $I_1 = I_2$ e dunque $f(I_1) = f(I_2)$, pertanto $f(I_1) \sqsubseteq^\omega f(I_2)$. Se invece I_1 è finito, $I_1 = \downarrow d_1$, distinguiamo due casi:

- I_2 è finito
  dunque $I_2 = \downarrow d_2$; si ha $d_1 \in \downarrow d_2$ e quindi $f(I_1) = d_1 \sqsubseteq d_2 = f(I_2)$

- I_2 è infinito
  dunque $d_1 \in I_2$ per cui $f(I_1) = d_1 \in I_2 = f(I_2)$ e quindi $f(I_1) \sqsubseteq^\omega f(I_2)$

Viceversa, sia $f(I_1) \sqsubseteq^\omega f(I_2)$. Se I_1 è infinito allora $f(I_1) = I_1$, dunque $f(I_2) = I_1$ e dunque $I_2 = I_1$, per cui $I_1 \subseteq I_2$. Se invece I_1 è finito, $I_1 = \downarrow d_1$, distinguiamo due casi:

- I_2 è finito
  dunque $I_2 = \downarrow d_2$; si ha $f(I_1) = d_1 \sqsubseteq d_2 = f(I_2)$ e quindi $I_1 = \downarrow d_1 \subseteq \downarrow d_2 = I_2$

- I_2 è infinito
  dunque $f(I_2) = I_2$, quindi $d_1 \in I_2$, per cui $I_1 = \downarrow d_1 \subseteq I_2$

$\square$

In base alla proposizione precedente se $(D, \sqsubseteq)$ è un $\mathcal{BT}$*-albero* allora $(D^\omega, \sqsubseteq^\omega)$ è un *pointed-cpo algebrico* con:

- minimo $\perp_D$

- elementi compatti $\mathcal{K}(D^\omega) = D$
  in quanto corrispondono nell'isomorfismo agli ideali principali

- elementi massimali (non compatti) $Max(D^\omega) = \mathcal{C}_D$
  tali che $\forall C \in \mathcal{C}_D \downarrow(C) = C \cup \{C\}$

Definizione 4.2.4 Siano $(D_1, \sqsubseteq)$, $(D_2, \sqsubseteq)$ $\mathcal{BT}$*-alberi.* Una funzione $f : D_1 \to D_2$ si dice $\mathcal{BT}$*-funzione* se

- $\forall d \in D$ *level*$(f(d)) =$ *level*(d) (ossia $f({D_1}^{(i)}) \subseteq {D_2}^{(i)}$, diremo che f è *level-keeping*)

- f è monotona

Definizione 4.2.5 Siano $(D_1, \sqsubseteq)$, $(D_2, \sqsubseteq)$ $\mathcal{BT}$*-alberi* e sia $f : D_1 \to D_2$ una $\mathcal{BT}$*-funzione.* Si indica con f^ω la funzione:

$$f^\omega : {D_1}^\omega \to {D_2}^\omega$$

definita da:

$$f^\omega(d) = f(d) \qquad \forall d \in D_1$$
$$f^\omega((d^{(i)})_{i\in N}) = (f(d^{(i)}))_{i\in N} \qquad \forall (d^{(i)})_{i\in N} \in \mathcal{C}_{D_1}$$

Proposizione 4.2.3 *Siano* $(D_1, \sqsubseteq)$, $(D_2, \sqsubseteq)$ $\mathcal{BT}$-alberi *e sia* $f : D_1 \to D_2$ *una* $\mathcal{BT}$-funzione*. Allora la funzione* $f^\omega : {D_1}^\omega \to {D_2}^\omega$ *è* continua*.*

Dim:

È sufficiente osservare che in D^ω

$$f^\omega((d^{(i)})_{i\in N}) = \sqcup\{f(d_i) : i \in N\}$$

dunque ricorando che $\mathcal{K}(D^\omega) = D$ si ha che f^ω è definita come estensione per continuità di una funzione monotona sugli elementi compatti di D^ω e quindi si conclude.

□

4.3 Relazione tra CUM e $\mathcal{BT}$-alberi

Continuiamo con alcuni risultati che giustificano l'introduzione dei $\mathcal{BT}$*-alberi* evidenziando la loro relazione con i CUM. I risultati di questa sezione saranno poi fondamentali per provare la sostanziale equivalenza delle due strutture matematiche.

Notazione 4.3.1 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un $\mathcal{BT}$*-albero.* Assumeremo che un una catena $C_k \in \mathcal{C}_D$ abbia come elementi $({d_k}^{(i)})_{i\in N}$

Osservazione 4.3.1 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un $\mathcal{BT}$*-albero* e siano $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_D$. Se $d_1^{(n)} \neq d_2^{(n)}$ allora $d_1^{(i)} \neq d_2^{(i)}$ $\forall i \geq n$ Infatti se esistesse $i \geq n$ tale che $d_1^{(i)} = d_2^{(i)} = d$, allora, trattandosi di catene, $d_1^{(n)} \sqsubseteq d$, $d_2^{(n)} \sqsubseteq d$, quindi per la proprietà b dei $\mathcal{BT}$*-alberi* $d_1^{(n)} \sqsubseteq d_2^{(n)}$ o viceversa, ma questo non può accadere poiché i due elementi stanno nello stesso livello e sono distinti.

Proposizione 4.3.1 *Sia* $(D, \sqsubseteq)$ *un* $\mathcal{BT}$-albero*. Allora*

$$(\mathcal{C}_D, \delta^*)$$

con δ^* *definita da*

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}_D.\ \delta^*(C_1, C_2) = \inf\{2^{-n} : d_1^{(n)} = d_2^{(n)}\}$$

è un CUM.

Dim:

Iniziamo provando che δ^* è una *ultrametrica*, verificando le tre proprietà

a. $\delta^*(C_1, C_2) = 0$ sse $\forall n.\ \delta^*(C_1, C_2) \leq 2^{-n}$ sse $\forall n.\ d_1^{(n)} = d_2^{(n)}$ sse $C_1 = C_2$

b. $\delta^*(C_1, C_2) = \delta^*(C_2, C_1)$
ovvio

c. $\delta^*(C_1, C_2) \leq \max\{\delta^*(C_1, C_3), \delta^*(C_2, C_3)\}$
distinguiamo due casi

- se $C_1 = C_2$ allora $\delta^*(C_1, C_2) = 0$ e quindi la relazione vale.
- se $C_1 \neq C_2$, allora $\delta^*(C_1, C_2) = 2^{-(n_0-1)}$ con $n_0 = \min\{n : d_1^{(n)} \neq d_2^{(n)}\}$. Osserviamo che sicuramente
$$d_1^{(n_0)} \neq d_3^{(n_0)} \text{ oppure } d_2^{(n_0)} \neq d_3^{(n_0)}$$
e questo consente di concludere.

Proviamo ora che lo spazio è *compatto*. Sia $(C_n)_{n\in N}$ una successione in $\mathcal{C}_D$. Definiamo $(C_{n_k})_{k\in N}$ nel modo seguente:

- $n_0 = 0$
- $n_{k+1} = \min\{n : n \geq n_k, d_{n_k}^{(k+1)} = d_n^{(k+1)}\}$ l'esistenza di tale n_{k+1} è assicurata dal fatto che $d_{n_k}^{(k+1)} \in D^{(k+1)}$ che è finito

Definita quindi $C = (d^{(k)})_{k\in N}$ con $d^{(k)} = d_{n_k}^{(k)}$, si dimostra immediatamente che $\lim_{k\to\infty} C_{n_k} = C$ e quindi $(C_{n_k})_{k\in N}$ è la sottosuccessione convergente cercata.

$\square$

Abbiamo dunque visto come da un $\mathcal{BT}$*-albero* è possibile ottenere un CUM. Si vuole ora provare che, viceversa, da un CUM è possibile ottenere un $\mathcal{BT}$*-albero* considerando l'albero delle sfere formali dello spazio.

Proposizione 4.3.2 *Per ogni* CUM (M, d)*, l'albero delle sfere formali* $\mathcal{B}_M^F$ *è un* $\mathcal{BT}$-albero

Dim:

Si devono provare le quattro proprietà della definizione di $\mathcal{BT}$*-albero*:

a. esiste il minimo $\perp_{\mathcal{B}_M^F} = B^F(x, 0)$

b. $\forall B^F(x_1, n_1), B^F(x_2, n_2), B^F(x, n)$ con
$$B^F(x_1, n_1) \sqsubseteq B^F(x, n) \text{ e } B^F(x_2, n_2) \sqsubseteq B^F(x, n)$$
si ha, per le proposizioni precedenti
$$B^F(x_1, n_1) = B^F(x, n_1) \text{ e } B^F(x_2, n_2) = B^F(x, n_2)$$
e quindi

- se $n_1 \leq n_2$ $\ B^F(x_1, n_1) = B^F(x, n_1) \sqsubseteq B^F(x, n_2) = B^F(x_2, n_2)$
- se $n_2 \leq n_1$ $\ B^F(x_2, n_2) = B^F(x, n_2) \sqsubseteq B^F(x, n_1) = B^F(x_1, n_1)$

c. $\forall B^F(x,n)\ \downarrow B^F(x,n) = \{B^F(x,i) : i \leq n\}$ è finito

d. $\forall B^F(x,n)$

- $B^F(x,n+1) \in Succ(B^F(x,n)) \neq \emptyset$
- $Succ(B^F(x,n)) = \{B^F(y,n+1) : y \in B(x,2^{-n})\}$

ora, $B = B(x,2^{-n})$ è compatto, dunque $\{B(y,2^{-(n+1)}) : y \in B(x,2^{-n})\} = B[n+1]$ è finito. Sia $B[n+1] = \{B(y_i,2^{-(n+1)}) : i = 1 \ldots k\}$.
Si ha che $\forall y \in B.\ \exists i.\ y \in B(y_i,2^{-(n+1)})$, quindi $B^F(y,n+1) = B^F(y_i,n+1)$, per cui $Succ(B^F(x,n)) = \{B^F(y_i,n+1) : i = 1 \ldots k\}$ e quindi è finito.

$\square$

I risultati che seguono mostrano che la nozione di $\mathcal{BT}$*-funzione* sui $\mathcal{BT}$*-alberi* corrisponde a quella di funzione NDI sui CUM.

Proposizione 4.3.3 *Siano* $(D_1,\sqsubseteq)$, $(D_2,\sqsubseteq)$ $\mathcal{BT}$-alberi *e sia* $f : D_1 \to D_2$ *una* $\mathcal{BT}$-funzione. *Allora la funzione* ${f^\omega}_{|\mathcal{C}_{D_1}} : (\mathcal{C}_{D_1},\delta^*) \to (\mathcal{C}_{D_2},\delta^*)$ *è* NDI.

Dim:

Iniziamo osservando che la restrizione considerata è sensata in quanto l'immagine tramite f^ω di una catena è una catena.

Inoltre

$$
\begin{aligned}
&\delta^*(f(C_1),f(C_2)) = \\
&\quad = \inf\{2^{-n} : f(d_1^{(n)}) = f(d_2^{(n)})\} \leq \\
&\quad \leq inf\{2^{-n} : d_1^{(n)} = d_2^{(n)}\} = \\
&\quad = \delta^*(C_1,C_2).
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposizione 4.3.4 *Siano* (M_1,d_1), (M_2,d_2) *due* CUM *e sia* $f : M_1 \to M_2$ *una funzione* NDI. *Allora la funzione* $f_\tau : \mathcal{B}^F_{M_1} \to \mathcal{B}^F_{M_2}$ *definita da:*

$$f_\tau(B^F(x,n)) = B^F(f(x),n)$$

è una $\mathcal{BT}$-funzione.

Dim:

Osserviamo in primo luogo che f_τ è ben definita, cioè il valore di f_τ non dipende dal particolare elemento $B^F(x,n)$ considerato nella classe di equivalenza. Infatti se $B^F(x,n) = B^F(y,n)$ allora $y \in B(x,2^{-n})$ e quindi essendo f NDI si ha che $d_2(f(x),f(y)) \leq d_1(x,y) \leq 2^{-n}$ e quindi $B^F(f(x),n) = B^F(f(y),n)$.
Proviamo quindi che f_τ è una $\mathcal{BT}$*-funzione*:

- f_τ è *level-keeping*
  $level(f_\tau(B^F(x,n))) = level(B^F(f(x),n)) = n = level(B^F(x,n))$

- f_τ è monotona
  se $B^F(x,n) \sqsubseteq B^F(x,m)$ allora $n \leq m$ e quindi $f_\tau(B^F(x,n)) = B^F(f(x),n) \sqsubseteq B^F(f(x),m) = f_\tau(B^F(x,m))$ (si osservi che considerare due sfere con lo stesso centro non è limitativo, per i precedenti risultati, dato che le due sfere sono in relazione)

.

$\square$

4.4 Le Categorie Equivalenti $\mathcal{CUM}$ e $\mathcal{BT}$

In questa sezione si approfondisce lo studio della relazione esistente tra CUM e $\mathcal{BT}$*-alberi*. Più precisamente si introducono una categoria di spazi ultrametrici compatti ed una categoria di $\mathcal{BT}$*-alberi* e se ne prova l'equivalenza.

Definizione 4.4.1 Si indica con $\mathcal{CUM}$ la categoria avente come oggetti *spazi ultrametrici compatti (CUM)* e come morfismi le funzioni NDI tra tali spazi. Dominio, codominio, composizione di morfismi e morfismo identità sono definiti nel modo ovvio.

Definizione 4.4.2 Si indica con $\mathcal{BT}$ la categoria avente come oggetti $\mathcal{BT}$*-alberi* e come morfismi le $\mathcal{BT}$*-funzioni*. Dominio, codominio, composizione di morfismi e morfismo identità sono definiti nel modo ovvio.

Al fine di provare l'equivalenza delle due categorie, introduciamo due funtori F_{MT} e G_{TM}.

Definizione 4.4.3 Definiamo il funtore $F_{MT} : \mathcal{CUM} \to \mathcal{BT}$ nel modo seguente:

- $\forall (M,d)$ in $Obj_{\mathcal{CUM}}$
  $F_{MT}(M,d) = (\mathcal{B}^F_M, \sqsubseteq_{\mathcal{B}^F_M})$
- $\forall f_M : (M_1,d_1) \to (M_2,d_2)$ in $Mor_{\mathcal{CUM}}$
  $F_{MT}(f_M) : \mathcal{B}^F_{M_1} \to \mathcal{B}^F_{M_2}$
  $F_{MT}(f_M)(B^F(x,n)) = B^F(f(x),n)$

Proposizione 4.4.1 *Il funtore F_{MT} è ben definito.*

Dim:

Dai risultati precedenti segue che se (M,d) è un CUM, $F_{MT}(M,d)$ è un $\mathcal{BT}$*-albero* e se f_M è una funzione NDI allora $F_{MT}(f_M)$ è una $\mathcal{BT}$*-funzione*.
Inoltre valgono le proprietà:

a. $F_{MT}(g \circ f) = F_{MT}(g) \circ F_{MT}(f)$
   siano $f : M_1 \to M_2,\ g : M_2 \to M_3$ funzioni NDI; allora:

$$\begin{aligned}
&F_{MT}(g \circ f)(B^F(x,n)) = \\
&\quad = B^F(g \circ f(x),n) = \\
&\quad = B^F(g(f(x)),n) = \\
&\quad = F_{MT}(g)(B^F(f(x),n)) = \\
&\quad = F_{MT}(g)(F_{MT}(f)(B^F(x,n))) = \\
&\quad = F_{MT}(g) \circ F_{MT}(f)(B^F(x,n))
\end{aligned}$$

b. $F_{MT}(id_M) = id_{F_{MT}(M)}$
infatti

$$\begin{aligned} & F_{MT}(id_M)(B^F(x,n)) = \\ & \quad = B^F(id_M(x),n) = \\ & \quad = B^F(x,n) = \\ & \quad = id_{F_{MT}(M)}(B^F(x,n)) \end{aligned}$$

□

Definizione 4.4.4 Definiamo il funtore $G_{TM} : \mathcal{BT} \rightarrow \mathcal{CUM}$ nel modo seguente:

- $\forall (D, \sqsubseteq)$ in $Obj_{\mathcal{BT}}$
$G_{TM}((D, \sqsubseteq)) = (\mathcal{C}_D, \delta^*)$

- $\forall f : (D_1, \sqsubseteq) \rightarrow (D_2, \sqsubseteq)$ in $Mor_{\mathcal{BT}}$
$G_{TM}(f) : \mathcal{C}_{D_1} \rightarrow \mathcal{C}_{D_2}$
$G_{TM}(f) = f^{\omega}{}_{|\mathcal{C}_{D_1}}$

Proposizione 4.4.2 *Il funtore G_{TM} è ben definito.*

Dim:

Dai risultati precedenti segue che se $(D, \sqsubseteq)$ è un $\mathcal{BT}$*-albero*, $G_{TM}((D, \sqsubseteq))$ è un CUM e se f è una $\mathcal{BT}$*-funzione* allora $G_{TM}(f)$ è una funzione NDI.
Inoltre

a. $G_{TM}(g \circ f) = G_{TM}(g) \circ G_{TM}(f)$
siano $f : D_1 \rightarrow D_2,\ g : D_2 \rightarrow D_3$ $\mathcal{BT}$*-funzioni*; allora:

$$\begin{aligned} & G_{TM}(g \circ f)((d^{(i)})_{i \in N}) = \\ & \quad = (g \circ f)^{\omega}{}_{|\mathcal{C}_{D_1}}((d^{(i)})_{i \in N}) = \\ & \quad = (g(f(d^{(i)})))_{i \in N} = \\ & \quad = G_{TM}(g)((f(d^{(i)}))_{i \in N}) = \\ & \quad = G_{TM}(g)(G_{TM}(f)((d^{(i)})_{i \in N})) = \\ & \quad = G_{TM}(g) \circ G_{TM}(f)((d^{(i)})_{i \in N}) \end{aligned}$$

b. $G_{TM}(id_D) = id_{G_{TM}(D)}$
infatti

$$\begin{aligned} & G_{TM}(id_D) = \\ & \quad = {id_D}^{\omega}{}_{|\mathcal{C}_D} = \\ & \quad = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_D} = \\ & \quad = id_{G_{TM}(D)} \end{aligned}$$

□

Osservazione 4.4.1 Notiamo che nelle categorie $\mathcal{CUM}$ e $\mathcal{BT}$ gli isomorfismi, nel senso 'categoriale' sono rispettivamente le *isometrie* tra spazi metrici e gli *isomorfismi* tra strutture ordinate.

Siamo dunque in grado di dimostrare il teorema di equivalenza:

Teorema 4.4.1 (Teorema di Equivalenza) *Le categorie* $\mathcal{CUM}$ *e* $\mathcal{BT}$ *sono* equivalenti

Dim:

Si deve provare che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{lll}
a.1 & G_{TM} \circ F_{MT}(M,d) \cong (M,d) & \forall (M,d) \text{ in } Obj_{\mathcal{CUM}} \\
a.2 & G_{TM} \circ F_{MT}(f_M) \cong f_M & \forall f_M : (M_1,d_1) \to (M_2,d_2) \text{ in } Mor_{\mathcal{CUM}} \\
b.1 & F_{MT} \circ G_{TM}((D,\sqsubseteq)) \cong (D,\sqsubseteq) & \forall (D,\sqsubseteq) \text{ in } Obj_{\mathcal{BT}} \\
b.2 & F_{MT} \circ G_{TM}(f) \cong f & \forall f : (D_1,\sqsubseteq) \to (D_2,\sqsubseteq) \text{ in } Mor_{\mathcal{BT}}
\end{array}$$

Iniziamo dalla prima proprietà:

(a.1) Per come sono definiti i due funtori:

$$G_{TM} \circ F_{MT}(M,d) = G_{TM}(F_{MT}(M,d)) = G_{TM}(\mathcal{B}^F_M) = (\mathcal{C}_{\mathcal{B}^F_M}, \delta^*)$$

ora $\mathcal{C}_{\mathcal{B}^F_M} = \{(B(x,n))_{n\in N} : x \in M\}$, dunque definita una funzione

$$f : (M,d) \to \mathcal{C}_{\mathcal{B}^F_M}$$
$$f(x) = (B(x,n))_{n\in N}$$

si ha che f è un'isometria. Infatti:

$$\begin{aligned}
&\delta^*(f(x), f(y)) = \\
&\quad = \inf\{2^{-n} : B^F(x,n) = B^F(y,n)\} = \\
&\quad = \inf\{2^{-n} : d(x,y) \leq 2^{-n}\} = \\
&\quad = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 2^{-n_0} & \text{se } d(x,y) = 2^{-n_0} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dunque in ogni caso $\delta^*(f(x), f(y)) = d(x,y)$, per cui f è un'isometric embedding.
Pertanto f è iniettiva (infatti se $f(x) = f(y)$ allora $d(x,y) = \delta^*(f(x), f(y)) = 0$ e quindi $x = y$).
Inoltre f è ovviamente suriettiva dato che gli elementi di $\mathcal{C}_{\mathcal{B}^F_M}$ sono tutti del tipo $(B(x,n))_{n\in N}$ e quindi si conclude.

(a.2) Data $f_M : M_1 \to M_2$, posto $F_{MT}(f_M) = f$, quindi

$$f : \mathcal{B}^F_{M_1} \to \mathcal{B}^F_{M_2}$$
$$f(B^F(x,n)) = B^F(f_M(x), n)$$

si ha:

$$G_{TM} \circ F_{MT}(f_M) = G_{TM}(f) = f^{\omega}{}_{|\mathcal{C}_{\mathcal{B}^F_{M_1}}}$$

Ora per ogni $x \in M$ l'immagine di x tramite l'isometria (vedi punto precedente) è $isom_1(x) = (B(x,n))_{n\in N}$, dunque

$$
\begin{aligned}
&G_{TM} \circ F_{MT}(f_M)(isom_1(x)) = \\
&\quad = G_{TM} \circ F_{MT}(f_M)((B(x,n))_{n\in N}) = \\
&\quad = f^{\omega}((B(x,n))_{n\in N}) = \\
&\quad = (B(f_M(x),n))_{n\in N} = \\
&\quad = isom_2(f_M(x)) \qquad\qquad\qquad\qquad \text{con } isom_2 \text{ altra isometria}
\end{aligned}
$$

Pertanto $G_{TM} \circ F_{MT}(f_M) = isom_2 \circ f_M \circ isom_1{}^{-1}$, che è quanto si voleva dimostrare.

(b.1) Per come sono definiti i due funtori:

$$F_{MT} \circ G_{TM}((D, \sqsubseteq)) = F_{MT}(\mathcal{C}_D, \delta^*) = \mathcal{B}^F_{\mathcal{C}_D}$$

Ora $\mathcal{C}_D = \{(d^{(i)})_{i\in N} : d^{(i)} \in D^{(i)}\}$ e quindi

$$\mathcal{B}^F_{\mathcal{C}_D} = \{B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n) : n \in N, (d^{(i)})_{i\in N} \in \mathcal{C}_D\}$$

Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
&B((d^{(i)})_{i\in N}, 2^{-n}) = \\
&\quad = \{(d'^{(i)})_{i\in N} : \delta^*((d^{(i)})_{i\in N}, (d'^{(i)})_{i\in N}) \leq 2^{-n}\} = \\
&\quad = \{(d'^{(i)})_{i\in N} : d'^{(n)} = d^{(n)}\}
\end{aligned}
$$

Definiamo dunque la funzione:

$$
\begin{aligned}
&f : \mathcal{B}^F_{\mathcal{C}_D} \to D \\
&f(B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n)) = d^{(n)}
\end{aligned}
$$

f è ben definita per l'osservazione precedente ed è un isomorfismo, infatti

- f è *iniettiva*

se $f(B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n)) = f(B^F((d'^{(i)})_{i\in N}, n)) = d^{(n)}$ allora per definizione di f le due successioni $(d^{(i)})_{i\in N}$ e $(d'^{(i)})_{i\in N}$ hanno elemento n-esimo coincidente uguale a $d^{(n)}$, pertanto, per definizione di δ^* si ha che $\delta^*((d^{(i)})_{i\in N}, (d'^{(i)})_{i\in N}) \leq 2^{-n}$ e quindi $B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n) = B^F((d'^{(i)})_{i\in N}, n)$.

- f è *suriettiva*

per ogni $d^{(n)} \in D^{(n)}$, considerata una catena infinita $(d^{(i)})_{i\in N}$ con n-esimo elemento $d^{(n)}$ (esiste poiché $\downarrow d^{(n)}$ è una catena finita e $\forall d$ $Succ(d) \neq \emptyset$) si ha che $f(B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n)) = d^{(n)}$.

- f è *monotona*

se $B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n) \sqsubseteq B^F((d'^{(i)})_{i\in N}, m)$ allora, è noto che si può supporre che le due sfere abbiano lo stesso centro $(d^{(i)})_{i\in N}$ e $n \leq m$. Pertanto essendo $(d^{(i)})_{i\in N}$ una catena $d^{(n)} \sqsubseteq d^{(m)}$, ma queste sono le immagini tramite f delle due sfere e quindi si conclude la monotonia di f.

- f^{-1} è *monotona*

come si è visto nella dimostrazione della suriettività se $level(d) = n$ allora $f^{-1}(d) = B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n)$ con $d^{(n)} = d$. Pertanto se $d^{(n)} \sqsubseteq d^{(m)}$ $(n \leq m)$ possiamo scegliere come centro delle sfere formali $f^{-1}(d^{(n)}), f^{-1}(d^{(m)})$ la stessa successione $(d^{(i)})_{i\in N}$, per cui

$$f^{-1}(d^{(n)}) = B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n) \sqsubseteq B^F((d^{(i)})_{i\in N}, m) = f^{-1}(d^{(m)})$$

(b.2) Sia $f : D_1 \to D_2$ una $\mathcal{BT}$*-funzione*. $\forall d \in D^{(n)}$ l'immagine di d in $\mathcal{B}^F_{\mathcal{C}_{D_1}}$ tramite l'isomorfismo (vedi punto precedente) è $isom_1(d) = B^F((d^{(i)})_{i\in N}, n)$ con $d = d^{(n)}$.

Ora:

$$
\begin{aligned}
&F_{MT} \circ G_{TM}(f)(isom_1(d)) = \\
&\quad = F_{MT} \circ G_{TM}(f)(B^F((d^{(i)})_{i \in N}, n)) = \\
&\quad = F_{MT}(f^{\omega}{}_{|\mathcal{C}_D})(B^F((d^{(i)})_{i \in N}, n)) = \\
&\quad = (B^F((f(d^{(i)}))_{i \in N}, n)) = \\
&\quad = isom_2(f(d)) \qquad\qquad\qquad\qquad \text{con } isom_2 \text{ altro isomorfismo}
\end{aligned}
$$

Pertanto $F_{MT} \circ G_{TM}(f) = isom_2 \circ f \circ {isom_1}^{-1}$, che è quanto si voleva dimostrare.

□

4.5 Funzioni Restringenti e Punti Fissi

Nell'ambito metrico riveste una notevole importanza la nozione di *funzione contrattiva*. In questa sezione verrà presentata la nozione corrispondente per i $\mathcal{BT}$*-alberi* e verrà provato un risultato che può essere visto come una reinterpretazione del teorema di Banach-Cacciopoli per i $\mathcal{BT}$*-alberi*.

Osservazione 4.5.1 Siano M_1, M_2 due CUM e sia $f_M : M_1 \to M_2$ una funzione $\frac{1}{2}$*-contrattiva*. Consideriamo:

$$
\begin{aligned}
&F_{MT}(f_M) : F_{MT}(M_1) \to F_{MT}(M_2) \\
&F_{MT}(f_M)(B^F(x, n)) = B^F(f_M(x), n)
\end{aligned}
$$

Si ha che $\forall x \in M,\ n \in N$

$$
Succ(B^F(x, n)) = \{B^F(y, n+1) : y \in B(x, 2^{-n})\}
$$

Ora $\forall B^F(y_1, n+1), B^F(y_2, n+1) \in Succ(B^F(x, n))$. $d(f(y_1), f(y_2)) \leq \frac{1}{2} d(y_1, y_2) \leq \frac{1}{2} 2^{-n} = 2^{-(n+1)}$ pertanto

$$
F_{MT}(f_M)(B^F(y_1, n+1)) = B^F(f_M(y_1), n+1) = B^F(f_M(y_2), n+1) = F_{MT}(f_M)(B^F(y_2, n+1))
$$

ovvero i tutti successori (immediati) di una sfera hanno ugual immagine.

L'osservazione precedente suggerisce la validità della seguente:

Proposizione 4.5.1 *Siano D_1, D_2 $\mathcal{BT}$-alberi e sia $f : D_1 \to D_2$ una $\mathcal{BT}$-funzione. Allora*

$$
G_{TM}(f) : \mathcal{C}_{D_1} \to \mathcal{C}_{D_2} \ \text{ è } \tfrac{1}{2}\text{-contrattiva} \ \text{ sse } \ \forall d \in D \ f(\text{Succ}(d)) = \{d'\}
$$

Omettiamo la dimostrazione, in quanto ci apprestiamo a provare un risultato più generale. A tale scopo dobbiamo introdurre la funzione discendente ennesimo $Succ^n(d)$ e la nozione di funzione *restringente*.

Definizione 4.5.1 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un $\mathcal{BT}$*-albero* e sia $d \in D$. Per $n \in N$ si definisce $Succ^n(d)$ nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
&Succ^0(d) = \{d\} \\
&Succ^{n+1}(d) = \cup\{Succ(d') : d' \in Succ^n(d)\}
\end{aligned}
$$

Definizione 4.5.2 Siano $(D_1, \sqsubseteq), (D_2, \sqsubseteq)$ *$\mathcal{BT}$-alberi*. Un *$\mathcal{BT}$-funzione* $f : D_1 \to D_2$ si dice *n-restringente* se $\forall d \in D_1\ f(Succ^n(d)) = \{d'\}$.

Vale quindi la seguente:

Proposizione 4.5.2 *Siano D_1, D_2 $\mathcal{BT}$-alberie sia $f : D_1 \to D_2$ una $\mathcal{BT}$-funzione. Allora*

$$G_{TM}(f) : \mathcal{C}_{D_1} \to \mathcal{C}_{D_2} \text{ è } 2^{-n}\text{-contrattiva sse } f \text{ è n-restringente}$$

Dim:

($\Rightarrow$) Sia $G_{TM}(f)$ 2^{-n}-contrattiva; proviamo che f è *n-restringente*.
Sia $d \in D_1, level(d) = m$, allora $\forall d_1^{(m+n)}, d_2^{(m+n)} \in Succ^n(d)$ e consideriamo due successioni $({d_1}^{(i)})_{i \in N}, ({d_2}^{(i)})_{i \in N} \in \mathcal{C}_{D_1}$ dove $d_1^{(m+n)}, d_2^{(m+n)}$ sono proprio gli elementi in questione. Si ha dunque che fino all'indice $m + n$ le due successioni $({d_j}^{(i)})_{i \in N}$ coincidono con $\downarrow d_j^{(m+n)}$; in particolare per entrambe $d_j^{(m)} = d$. poiché le due successioni hanno elemento m-esimo coincidente, per definizione di δ^* si ha $\delta^*(({d_1}^{(i)})_{i \in N}, ({d_2}^{(i)})_{i \in N}) \leq 2^{-m}$ e quindi:

$$\begin{aligned}
&\delta^*((f({d_1}^{(i)}))_{i \in N}, (f({d_2}^{(i)}))_{i \in N}) = \\
&\quad = \delta^*(G_{TM}(f)(({d_1}^{(i)})_{i \in N}), G_{TM}(f)(({d_2}^{(i)})_{i \in N})) \leq \quad \text{essendo } G_{TM}(f)\ 2^{-n} - \textit{contrattiva} \\
&\quad \leq 2^{-n} \delta^*(({d_1}^{(i)})_{i \in N}, ({d_2}^{(i)})_{i \in N}) \leq \\
&\quad \leq 2^{-n} 2^{-m} = 2^{-(m+n)}
\end{aligned}$$

Pertanto $f(d_1^{(m+n)}) = f(d_2^{(m+n)})$. Data la genericità degli elementi in $Succ^n(d)$ si conclude che $f(Succ^n(d))$ contiene un solo elemento e quindi f è *n-restringente*.

($\Leftarrow$) Sia f *n-restringente*; allora $\forall ({d_1}^{(i)})_{i \in N}, ({d_2}^{(i)})_{i \in N} \in \mathcal{C}_{D_1}$ distinguiamo due casi:
- se $\delta^*(({d_1}^{(i)})_{i \in N}, ({d_2}^{(i)})_{i \in N}) = 0$ ossia $({d_1}^{(i)})_{i \in N} = ({d_2}^{(i)})_{i \in N}$, allora

$$\delta^*(G_{TM}(f)(({d_1}^{(i)})_{i \in N}), G_{TM}(f)(({d_2}^{(i)})_{i \in N})) = 0 \leq 2^{-n} \delta^*(({d_1}^{(i)})_{i \in N}, ({d_2}^{(i)})_{i \in N})$$

- se $\delta^*(({d_1}^{(i)})_{i \in N}, ({d_2}^{(i)})_{i \in N}) = 2^{-m}$ allora $d_1^{(m)} = d_2^{(m)}$, quindi essendo f *n-restringente* e $d_1^{(m+n)}, d_2^{(m+n)} \in Succ^n(d_1^{(m)})$ si ha che $f(d_1^{(m+n)}) = f(d_2^{(m+n)})$ e quindi

$$\begin{aligned}
&\delta^*(G_{TM}(f)(({d_1}^{(i)})_{i \in N}), G_{TM}(f)(({d_2}^{(i)})_{i \in N}) = \\
&\quad = \delta^*((f({d_1}^{(i)}))_{i \in N}, (f({d_2}^{(i)}))_{i \in N}) \leq \\
&\quad \leq 2^{-(m+n)} = \\
&\quad = 2^{-n} \delta^*(({d_1}^{(i)})_{i \in N}, ({d_2}^{(i)})_{i \in N})
\end{aligned}$$

cioè $G_{TM}(f)$ è 2^{-n}-contrattiva.

$\square$

Vale anche la proposizione 'inversa', cioè:

Proposizione 4.5.3 *Siano M_1, M_2 due CUM e sia $f_M : M_1 \to M_2$ una funzione NDI. Allora*

$$F_{MT}(f_M) : \mathcal{B}^F_{M_1} \to \mathcal{B}^F_{M_2} \text{ è n-restringente sse } f_M \text{ è } 2^{-n}\text{-contrattiva}$$

Dim:

($\Rightarrow$) Sia $F_{MT}(f_M)$ *n-restringente*; $\forall x_1, x_2 \in M_1$ distinguiamo due casi:

- se $d(x_1, x_2) = 0$, cioè $x_1 = x_2$, allora $f_M(x_1) = f_M(x_2)$ e quindi $d(f_M(x_1), f_M(x_2)) = 0 = 2^{-n}d(x_1, x_2)$.

- se $d(x_1, x_2) = 2^{-m}$ allora $B^F(x_1, m) = B^F(x_2, m)$, dunque $B^F(x_1, m+n), B^F(x_2, m+n) \in$ *Succ*$^n(B^F(x_1, m))$ per cui, essendo $F_{MT}(f_M)$ *n-restringente*:

$$B^F(f_M(x_1), m+n) = F_{MT}(f_M)(B^F(x_1, m+n)) = F_{MT}(f_M)(B^F(x_2, m+n)) = B^F(f_M(x_2), m+n)$$

e quindi $d(f_M(x_1), f_M(x_2)) \leq 2^{-(m+n)} = 2^{-n}d(x_1, x_2)$.
Dunque f_M è 2^{-n}-contrattiva.

($\Leftarrow$) Sia f_M n-contrattiva; iniziamo osservando che:

$$Succ^n(B^F(x, m)) = \{B^F(y, m+n) : y \in B(x, 2^{-m})\}$$

Dunque $\forall B^F(y_1, m+n), B^F(y_2, m+n) \in Succ^n(B^F(x, m))$ si ha che $d(y_i, x) \leq 2^{-m}$, per cui:

$$\begin{aligned}
& d(f_M(y_1), f_M(y_2)) \leq && \text{per l'ultrametricità} \\
& \quad \leq \max\{d(f_M(y_1), f_M(x)), d(f_M(y_2), f_M(x)) \leq && f \text{ è } 2^{-n}\text{-contrattiva} \\
& \quad \leq \max\{2^{-n}d(y_1, x), 2^{-n}d(y_2, x)\} \leq && \\
& \quad \leq 2^{-(m+n)} &&
\end{aligned}$$

Pertanto

$$F_{MT}(f_M)(B^F(y_1, m+n)) = B^F(f(y_1), m+n) = B^F(f(y_2), m+n) = F_{MT}(f_M)(B^F(y_2, m+n))$$

e quindi per l'arbitrarietà dei due elementi in $Succ^n(B^F(x, m))$ si conclude.

□

Ora dato un CUM M, ogni funzione *contrattiva* $f : M \to M$, per il teorema di Banach-Cacciopoli, ha un unico punto fisso fix(f), che si ottiene iterando f un numero infinito di passi su di un qualsiasi punto dello spazio:

$$\text{fix}(f) = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) \quad \text{con } x_0 \in M \text{ qualsiasi}$$

Vogliamo ora presentare il risultato corrispondente per i $\mathcal{BT}$*-alberi*.

Proposizione 4.5.4 *Sia D un $\mathcal{BT}$*-albero *e sia $f : D \to D$ una $\mathcal{BT}$*-funzione restringente*. Allora $\exists!(d^{(i)})_{i\in N} \in \mathcal{C}_D$ tale che*

$$(d^{(i)})_{i\in N} = (f(d^{(i)}))_{i\in N}$$

Dim:

La successione $(d^{(i)})_{i\in N}$ può essere definita nel modo seguente:

$-d^{(0)} = \bot_D$
$-\ d^{(n+1)} =\ 'f(Succ(d^{(n)}))'$

dove con '$f(Succ(d^{(n)}))$' si indica l'elemento, unico per il fatto che f è *restringente*, nell'insieme. Osserviamo che effettivamente $(d^{(i)})_{i\in N}$ è una catena in $\mathcal{C}_D$ e $f(d^{(n)}) = d^{(n)}$ $\forall n \in N$.
A tale scopo, proviamo per induzione su n, che:

$$\forall n \in N.\ d^{(n)} \sqsubseteq d^{(n+1)} \text{ e } f(d^{(n)}) = d^{(n)}$$

$(n = 0)$ $d^{(0)} = \bot_D \sqsubseteq d^{(1)}$ ed essendo f una $\mathcal{BT}$*-funzione* $f(\bot_D) = \bot_D$ (dato che il livello 0 deve andare nel livello 0 questa è l'unica possibilità).

$(n \to n+1)$ per ipotesi induttiva, $d^{(n)} \sqsubseteq d^{(n+1)}$ e $f(d^{(n)}) = d^{(n)}$.
Ora

$$\begin{aligned} d^{(n+1)} &= f(Succ(d^{(n)})) = && \text{per def. della successione} \\ &= f(d^{(n+1)}) && f \textit{ n-restringente e } d^{(n+1)} \in Succ(d^{(n)}) \text{ per ip.ind.} \end{aligned}$$

Inoltre, sempre per definizione della successione, $d^{(n+2)} = f(Succ(d^{(n+1)}))$ per cui, per monotonia di f, $d^{(n+1)} = f(Succ(d^{(n)})) \sqsubseteq f(Succ(d^{(n+1)})) = d^{(n+2)}$.

Vediamo ora l'unicità. Sia $({d'}^{(i)})_{i\in N}$ un'altra successione 'punto fisso'. Proviamo per induzione su i che

$$\forall i \in N.\ d^{(i)} = {d'}^{(i)}$$

$(i = 0)$ $d^{(0)} = \bot_D = {d'}^{(0)}$

$(i \to i+1)$ per ipotesi induttiva, $d^{(i)} = {d'}^{(i)}$, dunque $d^{(i+1)} = f(Succ(d^{(i)}))$, ${d'}^{(i+1)} = f(Succ({d'}^{(i)})$ sono immagini tramite f *restringente* dei successori di uno stesso elemento e quindi coincidono.

□

Si noti che il risultato discende in modo ovvio dalle considerazioni precedenti. Infatti se $f : D \to D$ è *restringente* allora $G_{TM}(f)$ è contrattiva in $\mathcal{C}_D$, che è uno spazio compatto (quindi completo), per cui per il teorema di Banach-Cacciopoli, ha un unico punto fisso $(d^{(i)})_{i\in N}$ tale che $G_{TM}(f)((d^{(i)})_{i\in N}) = (d^{(i)})_{i\in N}$ ossia $(f(d^{(i)}))_{i\in N} = (d^{(i)})_{i\in N}$.
È però interessante notare che nel caso dei CUM, il teorema di punto fisso viene dimostrato in modo molto più semplice e naturale in $\mathcal{BT}$.

Infine, se M_1, M_2 sono CUM e $f_M : M_1 \to M_2$ è una contrazione, allora $F_{MT}(f_M) : \mathcal{B}^F_{\mathcal{C}_{M_1}} \to \mathcal{B}^F_{\mathcal{C}_{M_2}}$ è *restringente*. Dunque, in base alla proposizione precedente $F_{MT}(f_M)$ ha un unico 'punto fisso', $(B(x,n))_{n\in N}$ tale che $F_{MT}(f_M)((B(x,n))_{n\in N}) = (B(x,n))_{n\in N}$ ossia:

$$(B(f_M(x), n))_{n\in N} = (B(x,n))_{n\in N}$$

tale successione è ovviamente $(B(\text{fix}(f), n))_{n\in N}$.

4.6 Costruttori in $\mathcal{CUM}$ e in $\mathcal{BT}$

In questa sezione saranno introdotti dei costruttori di dominio nell'ambiente degli spazi metrici; vedremo che tali costruttori si adattano al caso degli spazi metrici (ultrametrici) completi, così come al caso degli spazi metrici (ultrametrici) compatti. In particolare noi siamo interessati al loro utilizzo nei CUM. Successivamente saranno introdotti corrispondenti costruttori anche nell'ambiente dei $\mathcal{BT}$-*alberi*, e sarà dimostrata la loro sostanziale equivalenza con i costruttori nei CUM.

4.6.1 Costruttori per gli Spazi Metrici

Definizione 4.6.1 Siano $(M, d), (M_1, d_1), (M_2, d_2)$ spazi metrici (con d, d_1, d_2 a valori in $[0, 1]$);

a. Si indica con $d_{\frac{1}{2}}$ la metrica su M definita nel modo seguente: $\forall x, y \in M$

$$d_{\frac{1}{2}}(x, y) = \tfrac{1}{2} d(x, y)$$

b. Si indica con $M_1 \times M_2$ il *prodotto* di M_1 e M_2, ovvero

$$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$$

Su tale insieme definiamo una metrica $d_\times$ nel modo seguente: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$

$$d_\times(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

c. Si indica con $M_1 \bar{\cup} M_2$ l'*unione disgiunta* di M_1 e M_2, ovvero

$$M_1 \bar{\cup} M_2 = \{(1, x_1) : x_1 \in M_1\} \cup \{(2, x_2) : x_2 \in M_2\}$$

Su tale insieme definiamo una metrica $d_{\bar{\cup}}$ nel modo seguente: $\forall x, y \in M_1 \bar{\cup} M_2$

$$d_{\bar{\cup}}(x, y) = \begin{cases} d_j(x', y') & \text{se } x = (j, x'), y = (j, y') \text{ con } j \in \{1, 2\} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

d. Si indica con $M_1 \rightarrow^1 M_2$ l'insieme delle *funzioni NDI* di M_1 in M_2, ovvero

$$M_1 \rightarrow^1 M_2 = \{f : M_1 \rightarrow M_2 : f \text{ è NDI}\}$$

Su tale insieme definiamo una metrica d_F nel modo seguente: $\forall f, g \in M_1 \rightarrow^1 M_2$

$$d_F(f, g) = \sup\{d_2(f(x), g(x)) : x \in M_1\}$$

e. Si indica con $\mathcal{P}_{ncl}(M)$ l'*insieme delle parti non vuote chiuse* di M, ovvero

$$\mathcal{P}_{ncl}(M) = \{X \subseteq M : X \neq \emptyset, X \text{ chiuso}\}$$

Su tale insieme definiamo una metrica d_H (metrica di *Hausdorff*) nel modo seguente: $\forall X, Y \in \mathcal{P}_{ncl}(M)$

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\}$$

con $d(x, Z) = \inf\{d(x, z) : z \in Z\}$

Proposizione 4.6.1 *Siano* $(M, d), (M_1, d_1), (M_2, d_2)$ *spazi metrici* completi (compatti) (ultrametrici) *(con* d, d_1, d_2 *a valori in* $[0, 1]$*); allora* *a.* $(M, d_{\frac{1}{2}})$

b. $(M_1 \times M_2, d_\times)$

c. $(M_1 \bar{\cup} M_2, d_{\bar{\cup}})$

d. $(M_1 \rightarrow^1 M_2, d_F)$

e. $(\mathcal{P}_{ncl}(M), d_H)$

sono spazi metrici completi (compatti) (ultrametrici).

Osservazione 4.6.1 Strettamente parlando, per la completezza (ultrametricità) di $(M_1 \rightarrow^1 M_2, d_F)$ non serve che M_1 sia completo (ultrametrico), ma è sufficiente che lo sia M_2.
Si noti inoltre che nel caso di spazi *compatti*, ogni insieme $X \in \mathcal{P}_{ncl}(M)$, essendo chiuso in un compatto, è compatto. Pertanto in questo caso $\mathcal{P}_{ncl}(M) = \mathcal{P}_{nco}(M)$. Ecco perché nel caso dei CUM considereremo appunto $\mathcal{P}_{nco}(M)$.

Osservazione 4.6.2 Osserviamo che $(\mathcal{CUM}, \rightarrow^1, \times, 1)$ è una categoria catesiana chiusa.

- $\times$ è un prodotto; se M_1 e M_2 sono due CUM allora $M_1 \times M_2$ è un prodotto dei due oggetti, con i morfismi *fst* e *snd* definiti:

  $$fst((x_1, x_2)) = x_1$$
  $$snd((x_1, x_2)) = x_2$$

- $\rightarrow^1$ è un esponenziale; se M_1 e M_2 sono due CUM allora $M_1 \rightarrow^1 M_2$ è un esponenziale dei due oggetti, con la funzione di applicazione definita da:

  $$apply(f, x) = f(x)$$

  e data una funzione $f : M_1 \times M_2 \rightarrow M_3$ il morfismo $curry(f)$ definito:

  $$curry(f)(x)(y) = f(x, y)$$

- l'oggetto terminale 1 è un qualunque spazio metrico con un unico elemento $(\{x\}, d)$ (con d definita nell'unico modo possibile $d(x, x) = 0$)

4.6.2 Costruttori per i $\mathcal{BT}$-alberi

Vogliamo ora introdurre dei costruttori di dominio per i $\mathcal{BT}$*-alberi*, corrispondenti a quelli visti per i CUM: dimezzamento della distanza, unione disgiunta, prodotto, spazio delle funzioni NDI e parti non vuote compatte.
Per ciascun costruttore introdotto si verifica la buona definizione e l'equivalenza con il corrispondente costruttore sui CUM.

Lift

Definizione 4.6.2 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un $\mathcal{BT}$*-albero*. Si indica con $D_\perp$ l'insieme

$$D_\perp = \{\perp\} \cup D \quad \text{con } \perp \notin D$$

Su tale insieme si definisce la relazione $\sqsubseteq_\perp$ nel modo seguente:

$$\sqsubseteq_\perp = \{(\perp, d) : d \in D\} \cup \sqsubseteq$$

Proposizione 4.6.2 *Se* $(D, \sqsubseteq)$ *è un* $\mathcal{BT}$-albero *allora* $(D_\perp, \sqsubseteq_\perp)$ *è un* $\mathcal{BT}$-albero.

Dim:

Immediato.

□

Prima di vedere l'equivalenza del costruttore introdotto con il corrispondente costruttore metrico è opportuno fare una considerazione sulle sfere nello spazio metrico con metrica 'dimezzata'.

Osservazione 4.6.3 Sia M un CUM e sia $x \in M$. In $M_{\frac{1}{2}}$ le sfere di centro x sono:

$$\begin{aligned}
&-B_{M_{\frac{1}{2}}}(x, 1) = M \\
&-B_{M_{\frac{1}{2}}}(x, 2^{-(n+1)}) = \\
&\quad = \{y \in M : d_{\frac{1}{2}}(x, y) \leq 2^{-(n+1)}\} = \quad \text{poiché } d_{\frac{1}{2}}(x, y) = \tfrac{1}{2} d(x, y) \\
&\quad = \{y \in M : d(x, y) \leq 2^n\} = \\
&\quad = B_M(x, 2^{-n})
\end{aligned}$$

Dunque dati $x, y \in M_{\frac{1}{2}}$ vale

$$B_M^F(x, n) = B_M^F(y, n) \ \textit{sse}\ B_{M_{\frac{1}{2}}}^F(x, n+1) = B_{M_{\frac{1}{2}}}^F(y, n+1)$$

infatti la prima uguaglianza è equivalente a $B_M(x, 2^{-n}) = B_M(y, 2^{-n})$; per la prima parte dell'osservazione, questo equivale a $B_{M_{\frac{1}{2}}}(x, 2^{-(n+1)}) = B_{M_{\frac{1}{2}}}(y, 2^{-(n+1)})$, che a sua volta equivale alla seconda uguaglianza.

Proposizione 4.6.3 *Sia* (M, d) *un* CUM*. Allora*

$$F_{MT}(M)_\perp \cong F_{MT}(M_{\frac{1}{2}})$$

Dim:

Definiamo una funzione f :

$$\begin{aligned}
&f : F_{MT}(M)_\perp \to F_{MT}(M_{\frac{1}{2}}) \\
&f(\perp) = B_{M_{\frac{1}{2}}}^F(x, 0) \\
&f(B_M^F(x, n)) = B_{M_{\frac{1}{2}}}^F(x, n+1)
\end{aligned}$$

Dall'osservazione precedente segue immediatamente che f è ben definita e *biettiva*.
Inoltre
- f è *monotona*
infatti $\forall b_1, b_2 \in F_{MT}(M_1)_\perp, b_1 \sqsubseteq b_2$ distinguiamo due casi

- se $b_1 = \perp$ allora $f(b_1) = B^F_{M_{\frac{1}{2}}}(x, 0) = \perp_{F_{MT}(M_{\frac{1}{2}})} \sqsubseteq f(b_2)$ qualunque sia b_2.
- se $b_1 = B^F_M(x, n), x \in M$ allora per la definizione dell'ordine in $F_{MT}(M_1)_\perp$ e per le proprietà delle sfere formali, possiamo supporre che $b_2 = B^F_M(x, m)$, con $n \leq m$ e quindi $f(b_1) = B^F_{M_{\frac{1}{2}}}(x, n+1) \sqsubseteq B^F_{M_{\frac{1}{2}}}(x, m+1) = f(b_2)$

Si osservi che f è 'conserva' i livelli ed è monotona. Quindi è una $\mathcal{BT}$*-funzione*, ossia un morfismo in $\mathcal{BT}$.
- f^{-1} è *monotona*
infatti $\forall b_1, b_2 \in F_{MT}(M_1)_\perp, f(b_1) \sqsubseteq f(b_2)$ distinguiamo due casi

- se $f(b_1) = B^F_{M_{\frac{1}{2}}}(x, 0)$ allora $b_1 = \perp$ e quindi $b_1 \sqsubseteq b_2$ qualunque sia b_2.
- se $f(b_1) = B^F_{M_{\frac{1}{2}}}(x, n+1)$ allora $b_1 = B^F_M(x, n)$ e si può supporre che $f(b_2) = B^F_{M_{\frac{1}{2}}}(x, m+1)$, con $n \leq m$ e quindi $b_2 = B^F_M(x, m)$ per cui $b_1 \sqsubseteq b_2$

Pertanto f è un isomorfismo; quindi si conclude.

□

Vale inoltre anche la proposizione duale:

Proposizione 4.6.4 *Sia D un* $\mathcal{BT}$-albero*. Allora*

$$G_{TM}(D)_{\frac{1}{2}} \cong G_{TM}(D_\perp)$$

Dim:

Vedi proposizione 4.6.7.

□

Prodotto

Definizione 4.6.3 Siano $(D_1, \sqsubseteq_1), (D_2, \sqsubseteq_2)$ due $\mathcal{BT}$*-alberi*. Si indica con $D_1 \otimes D_2$ l'insieme definito per livelli nel modo seguente

$$(D_1 \otimes D_2)^{(i)} = {D_1}^{(i)} \times {D_2}^{(i)} = \{(d_1, d_2) : d_1 \in {D_1}^{(i)}, d_2 \in {D_2}^{(i)}\}$$

Su tale insieme si definisce la relazione $\sqsubseteq_\otimes$ nel modo seguente: $\forall d = (d_1, d_2), e = (e_1, e_2) \in D_1 \otimes D_2$

$$d \sqsubseteq_\otimes e \quad \text{se } d_1 \sqsubseteq_1 e_1 \text{ e } d_2 \sqsubseteq_2 e_2$$

Proposizione 4.6.5 *Se $(D_1, \sqsubseteq_1), (D_2, \sqsubseteq_2)$ sono* $\mathcal{BT}$-alberi *allora $(D_1 \otimes D_2, \sqsubseteq_\otimes)$ è un* $\mathcal{BT}$-albero*.*

Dim:

Immediato.

□

Prima di vedere l'equivalenza del costruttore introdotto con il corrispondente costruttore metrico è opportuno fare una considerazione sulle sfere nello spazio metrico *prodotto*.

Osservazione 4.6.4 Siano M_1, M_2 due CUM, sia $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ e sia $r \in [0, 1]$. La sfera di centro x e raggio r è:

$$\begin{aligned}
&B_\times(x,r) = \\
&\quad = \{(x_1',x_2') : d_\times((x_1',x_2'),(x_1,x_2)) \le r\} = \\
&\quad = \{(x_1',x_2') : \max\{d_{M_1}(x_1',x_1), d_{M_2}(x_2',x_2)\} \le r\} = \\
&\quad = \{(x_1',x_2') : d_{M_1}(x_1',x_1) \le r,\ d_{M_2}(x_2',x_2) \le r\} = \\
&\quad = B_{M_1}(x_1,r) \times B_{M_2}(x_2,r)
\end{aligned}$$

Dunque, ragionando come nell'osservazione 4.6.3, si conclude che dati $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in M_1 \times M_2$ vale

$$B^F_\times(x,n) = B^F_\times(y,n) \ \textit{sse}\ B^F_{M_i}(x_i,n) = B^F_{M_i}(y_i,n),\ \ i = 1,2$$

Proposizione 4.6.6 *Siano $(M_1,d_1),(M_2,d_2)$ due CUM. Allora*

$$F_{MT}(M_1) \otimes F_{MT}(M_2) \cong F_{MT}(M_1 \times M_2)$$

Dim:

Definiamo una funzione f :

$$\begin{aligned}
&f : F_{MT}(M_1) \otimes F_{MT}(M_2) \to F_{MT}(M_1 \times M_2) \\
&f((B^F_{M_1}(x_1,n), B^F_{M_2}(x_2,n))) = B^F_\times((x_1,x_2),n)
\end{aligned}$$

Dall'osservazione precedente segue immediatamente che f è ben definita e *biettiva*.
Inoltre $\forall p_1 = (B^F(x_1,n), B^F(x_2,n)),\ p_2 = (B^F(y_1,m), B^F(y_2,m)) \in F_{MT}(M_1) \otimes F_{MT}(M_2)$, con $n \le m$ si ha

$$\begin{aligned}
&f(p_1) \sqsubseteq f(p_2) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow B^F((x_1,x_2),n) \sqsubseteq B^F((y_1,y_2),m) \Leftrightarrow && \text{ordine sulle sfere formali} \\
&\quad \Leftrightarrow B((x_1,x_2),2^{-n}) \cap B((y_1,y_2),2^{-m}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow B(x_i,2^{-n}) \cap B(y_i,2^{-m}) \neq \emptyset\ i = 1,2 \Leftrightarrow && \text{ordine sulle sfere formali} \\
&\quad \Leftrightarrow B^F(x_i,n) \sqsubseteq B^F(y_i,m)\ i = 1,2 \Leftrightarrow && \text{per definizione di } \sqsubseteq_\otimes \\
&\quad \Leftrightarrow p_1 = (B^F(x_1,n), B^F(x_2,n)) \sqsubseteq p_2 = (B^F(y_1,m), B^F(y_2,m))
\end{aligned}$$

Dunque f è un isomorfismo e si conclude. Si osservi che in particolare f 'conserva' i livelli ed è iniettiva, dunque è una $\mathcal{BT}$-*funzione*.

□

Vale inoltre anche la proposizione duale:

Proposizione 4.6.7 *Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$*-alberi. *Allora*

$$G_{TM}(D_1) \times G_{TM}(D_2) \cong G_{TM}(D_1 \otimes D_2)$$

Dim:

Poiché le categorie $\mathcal{CUM}$ e $\mathcal{BT}$ sono equivalenti, esistono due CUM M_1, M_2 tali che $F_{MT}(M_1) \cong D_1$ e $F_{MT}(M_2) \cong D_2$.
Quindi

$$
\begin{array}{ll}
G_{TM}(D_1 \otimes D_2) \cong & \\
\quad \cong G_{TM}(F_{MT}(M_1) \otimes F_{MT}(M_2)) \cong & \text{per la proposizione precedente} \\
\quad \cong G_{TM}(F_{MT}(M_1 \times M_2)) \cong & \text{per il teor. di equivalenza} \\
\quad M_1 \times M_2 \cong & \text{per il teor. di equivalenza} \\
\quad G_{TM}(F_{MT}(M_1)) \times G_{TM}(F_{MT}(M_2)) \cong & \\
\quad \cong G_{TM}(D_1) \times G_{TM}(D_1) &
\end{array}
$$

□

Somma Coalescente

Definizione 4.6.4 Siano $(D_1, \sqsubseteq_1), (D_2, \sqsubseteq_2)$ due $\mathcal{BT}$-*alberi*. Si indica con $D_1 \oplus D_2$ l'insieme definito per livelli nel modo seguente

- $(D_1 \oplus D_2)^{(0)} = \{\perp\}$
- $(D_1 \oplus D_2)^{(i)} = D_1{}^{(i)} + D_2{}^{(i)} = \{(1, d_1) : d_1 \in D_1\} \cup \{(2, d_2) : d_2 \in D_2\}$ per $i > 0$

Su tale insieme si definisce la relazione $\sqsubseteq_\oplus$ nel modo seguente: $\forall d, e \in D_1 \oplus D_2$

- $\perp \sqsubseteq_\oplus d$
- $d \sqsubseteq_\oplus e$ se $d = (i, d'), e = (i, e')$ e $d' \sqsubseteq_i e'$

Proposizione 4.6.8 *Se* $(D_1, \sqsubseteq_1), (D_2, \sqsubseteq_2)$ *sono* $\mathcal{BT}$-alberi *allora* $(D_1 \oplus D_2, \sqsubseteq_\oplus)$ *è un* $\mathcal{BT}$-albero.

Dim:

Immediato.

□

Prima di vedere l'equivalenza del costruttore introdotto con il corrispondente costruttore metrico è opportuno fare una considerazione sulle sfere nello spazio metrico unione disgiunta.

Osservazione 4.6.5 Siano M_1, M_2 due CUM, sia $x \in M_1 \bar{\cup} M_2$ e sia $r \in [0, 1]$. La sfera di centro x e raggio r è:

- *se* $r = 1$ *allora* $B_{\bar{\cup}}(x, 1) = M_1 \bar{\cup} M_2$
- *se* $r < 1, x = (i, x')$ *allora* $B_{\bar{\cup}}(x, r) = \{(i, y') : y' \in B_{M_i}(x', r)\} = \{i\} \times B_{M_i}(x', r)$

Dunque, ragionando come nell'osservazione 4.6.3, si conclude che dati $x = (i, x'), y = (i, y') \in M_1 \bar{\cup} M_2$, $n > 0$ vale

$$B^F_{\bar{\cup}}(x, n) = B^F_{\bar{\cup}}(y, n) \text{ sse } B^F_{M_i}(x', n) = B^F_{M_i}(y', n)$$

Proposizione 4.6.9 *Siano* $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ *due* CUM. *Allora*

$$F_{MT}(M_1) \oplus F_{MT}(M_2) \cong F_{MT}(M_1 \bar{\cup} M_2)$$

Dim:

Definiamo una funzione f :

$f : F_{MT}(M_1) \oplus F_{MT}(M_2) \to F_{MT}(M_1 \bar{\cup} M_2)$
$f(\bot) = B^F_{\bar{\cup}}(x, 0)$ con x qualsiasi in $M_1 \bar{\cup} M_2$
$f(i, B^F_{M_i}(x, n)) = B^F_{\bar{\cup}}((i, x), n)$ per $n > 0$

Dall'osservazione precedente segue immediatamente che f è ben definita e *biettiva*.
Inoltre
- f è *monotona*
infatti se $b_1, b_2 \in F_{MT}(M_1) \oplus F_{MT}(M_2), b_1 \sqsubseteq b_2$ allora distinguiamo due casi

- se $b_1 = \bot$ allora $f(b_1) = B^F(x, 0) = \bot_{F_{MT}(M_1 \bar{\cup} M_2)} \sqsubseteq f(b_2)$ qualunque sia b_2.
- se $b_1 = (i, B^F(x, n)), x \in M_i, n > 0$ allora per la definizione dell'ordine in $F_{MT}(M_1) \oplus F_{MT}(M_2)$ e per le proprietà delle sfere formali, possiamo supporre che $b_2 = (i, B^F(x, m))$, con $n \le m$ e quindi $f(b_1) = B^F((i, x), n) \sqsubseteq B^F((i, x), m) = f(b_2)$

Si osservi che f è ovviamente 'conserva' i livelli ed è monotona. Quindi è una $\mathcal{BT}$-*funzione*, ossia un morfismo in $\mathcal{BT}$.
- f^{-1} è *monotona*
infatti se $b_1, b_2 \in F_{MT}(M_1) \oplus F_{MT}(M_2),\ f(b_1) \sqsubseteq f(b_2)$ si distinguono due casi:

- se $f(b_1) = B^F(x, 0) = \bot_{F_{MT}(M_1 \bar{\cup} M_2)}$ allora $b_1 = \bot \sqsubseteq b_2$ qualunque sia b_2.
- se $f(b_1) = B^F((i, x), n), x \in M_i, n > 0$ allora, per le proprietà delle sfere formali, possiamo supporre che $f(b_2) = B^F((x, i), m))$, con $n \le m$ e quindi $b_1 = (i, B^F(x, n)) \sqsubseteq (i, B^F(x, m)) = b_2$

Pertanto f è un isomorfismo; quindi si conclude.

□

Proposizione 4.6.10 *Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$*-alberi. *Allora*

$$G_{TM}(D_1) \bar{\cup} G_{TM}(D_2) \cong G_{TM}(D_1 \oplus D_2)$$

Dim:

Vedi proposizione 4.6.7.

□

Spazio delle Funzioni

Definizione 4.6.5 Siano $(D_1, \sqsubseteq_1), (D_2, \sqsubseteq_2)$ due $\mathcal{BT}$-*alberi*. Si indica con $D_1 {\to_{BT}} D_2$ l'insieme definito per livelli nel modo seguente

$$(D_1 {\to_{BT}} D_2)^{(i)} = {D_1}^{(i)} \to {D_2}^{(i)} = \{f_i \mid f_i : {D_1}^{(i)} \to {D_2}^{(i)}\}$$

Su tale insieme si definisce la relazione $\sqsubseteq_F$ nel modo seguente: $\forall f^{(i)}, f^{(j)} \in D_1 {\to_{BT}} D_2$ (*level*$(f^{(i)}) = i$, *level*$(f^{(j)}) = j$)

$$f^{(i)} \sqsubseteq_F f^{(j)} \quad \text{se } i \le j \text{ e } \forall d^{(i)} \in {D_1}^{(i)}, d^{(j)} \in {D_1}^{(j)}.\ d^{(i)} \sqsubseteq_1 d^{(j)} \Rightarrow\ f^{(i)}(d^{(i)}) \sqsubseteq_2 f^{(j)}(d^{(j)})$$

Osservazione 4.6.6 Si noti che una catena $(f^{(i)})_{i \in N} \in (D_1 {\to_{BT}} D_2)^\omega$ rappresenta una $\mathcal{BT}$-*funzione* di D_1 in D_2, nel senso che definita $f : D_1 \to D_2$

$$f(d^{(i)}) = f^{(i)}(d^{(i)}) \quad \forall i \in N,\ d^{(i)} \in D^{(i)}$$

si ha che f è una $\mathcal{BT}$*-funzione.*

Proposizione 4.6.11 *Se* $(D_1, \sqsubseteq_1), (D_2, \sqsubseteq_2)$ *sono* $\mathcal{BT}$-alberi *allora* $(D_1 \to_{BT} D_2, \sqsubseteq_F)$ *è un* $\mathcal{BT}$-albero.

Dim:

Proviamo che per $(D_1 \to_{BT} D_2, \sqsubseteq_F)$ valgono le proprietà della definizione di $\mathcal{BT}$*-albero.*

a. il minimo $\perp_{D_1 \to_{BT} D_2}$ è l'unica funzione del livello 0:

$$f^{(0)} : {D_1}^{(0)} \to {D_2}^{(0)}$$
$$f^{(0)}(\perp_{D_1}) = \perp_{D_2}$$

b. siano $f_1, f_2, f \in D_1 \to_{BT} D_2$, con $f_1 \sqsubseteq f,\ f_2 \sqsubseteq f$. Per fissare le idee, poniamo $level(f_1) = n,\ level(f_2) = m,\ level(f) = k$ con $n \leq m \leq k$.
Allora, $\forall d^{(n)} \in {D_1}^{(n)},\ d^{(m)} \in {D_1}^{(m)}$ con $d^{(n)} \sqsubseteq d^{(m)}$ vi è $d^{(k)} \in {D_1}^{(k)}$ tale che $(d^{(n)} \sqsubseteq)\ d^{(m)} \sqsubseteq d^{(k)}$, e quindi

$$f_1(d^{(n)}) \sqsubseteq f(d^{(k)})$$
$$f_2(d^{(m)}) \sqsubseteq f(d^{(k)})$$

pertanto, essendo D_2 un $\mathcal{BT}$*-albero* $f_1(d^{(n)}) \sqsubseteq f_2(d^{(m)})$.
Si conclude dunque che $f_1 \sqsubseteq f_2$.

c. $\forall f^{(n)} \in D_1 \to_{BT} D_2$ (di livello n), si ha che

$$\downarrow f^{(n)} \subseteq \cup_{i=1}^{n-1} (D_1 \to_{BT} D_2)^{(i)}$$

Ora, essendo i livelli di D_1 e D_2 finiti, anche i livelli di $D_1 \to_{BT} D_2$ lo sono, e quindi $\downarrow f^{(n)}$ è finito.

d. $\forall f^{(n)} \in D_1 \to_{BT} D_2$ (di livello n), si ha che

$$Succ(f^{(n)}) \subseteq (D_1 \to_{BT} D_2)^{(n+1)}$$

e quindi è finito.
Inoltre definita una funzione $f^{(n+1)} : {D_1}^{(n+1)} \to {D_2}^{(n+1)}$ nel modo seguente: se $d^{(n+1)} \in Succ(d^{(n)})$ allora $f^{(n+1)}(d^{(n+1)}) \in Succ(f^{(n)}(d^{(n)}))$, si ha che chiaramente $f^{(n+1)} \in Succ(f^{(n)})$, che pertanto è non vuoto.

□

Notazione 4.6.1 Per semplicità di notazione nel seguito a volte confonderemo una sfera formale $B^F(x, n)$ con l'insieme di punti (sfera $B(x, 2^{-n})$) ad essa associato. In particolare si scriverà $x \in B^F(x, n)$ per indicare $x \in B(x, 2^{-n})$.

Notazione 4.6.2 Siano M_1, M_2 due CUM. Ad ogni funzione $f^{(n)} \in (F_{MT}(M_1) \to_{BT} F_{MT}(M_2))^{(n)}$ può essere associata una funzione, che indicheremo con $\widehat{f^{(n)}}$

$$\widehat{f^{(n)}} : M_1 \to M_2$$

definita nel modo seguente: per ogni sfera $B^F(x,n) \in F_{MT}(M_1)$, per ogni $x' \in B^F(x,n)$ si fissa y qualsiasi in $f^{(n)}(B^F(x,n))$ e si pone

$$\widehat{f^{(n)}}(x') = y$$

Osserviamo che $\widehat{f^{(n)}}$ non è in genere NDI, dunque quando nel seguito, nello spazio $M_1 {\to}^1 M_2$ considereremo la sfera $B^F_{M_1 \to^1 M_2}(\widehat{f^{(n)}}, n)$, intenderemo, in realtà con abuso di notazione:

$$B^F_{M_1 \to M_2}(\widehat{f^{(n)}}, n) \cap M_1 {\to}^1 M_2$$

Si verifica facilmente che, nonostante l'arbitrarietà con cui è definita $\widehat{f^{(n)}}$ dette f_1 e f_2 due differenti definizioni di $\widehat{f^{(n)}}$, si ha $d_F(f_1, f_2) \leq 2^{-n}$ e quindi $B^F_{M_1 \to^1 M_2}(\widehat{f^{(n)}}, n)$ non dipende dalla scelta di $\widehat{f^{(n)}}$.

Proposizione 4.6.12 *Siano* $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ *due* CUM*. Allora*

$$F_{MT}(M_1) {\to}_{BT} F_{MT}(M_2) \cong F_{MT}(M_1 {\to}^1 M_2)$$

Dim:

Ricordiamo che le sfere in $M_1 {\to}^1 M_2$ sono:

$$B(f, 2^{-n}) = \{(f' : M_1 {\to}^1 M_2) : d(f'(x), f(x)) \leq 2^{-n} \ \forall x \in M_1\}$$

Definiamo dunque una funzione h :

$$h : (F_{MT}(M_1) {\to}_{BT} F_{MT}(M_2)) \to F_{MT}(M_1 {\to}^1 M_2)$$
$$h(f^{(n)}) = B^F(\widehat{f^{(n)}}, n) \quad \text{con } n = \mathit{level}(f^{(n)})$$

Dalle considerazioni precedenti segue immediatamente che h è ben definita.
Inoltre
- h è *iniettiva*
infatti $\forall f_1, f_2 \in F_{MT}(M_1) {\to}_{BT} F_{MT}(M_2)$, se $h(f_1) = h(f_2)$, allora necessariamente $\mathit{level}(f_1) = \mathit{level}(f_2) = n$, per cui:

$$h(f_1) = B^F(\widehat{f}_1, n) = B^F(\widehat{f}_2, n) = h(f_2)$$

e quindi $d(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2) \leq 2^{-n}$.
Pertanto $\forall B(x,n) \in F_{MT}(M_1)$, per definizione di $\widehat{f}_1$ e $\widehat{f}_2$,

$$\widehat{f}_1(x) \in f_1(B^F(x,n)) = B^F(x', n) \quad \text{con } x' \in M_2$$
$$\widehat{f}_2(x) \in f_2(B^F(x,n)) = B^F(x'', n) \quad \text{con } x'' \in M_2$$

dunque utilizzando queste relazioni e l'ultrametricità dello spazio:

$$d(\widehat{f}_1(x), x'') \leq \max\{d(\widehat{f}_1(x), \widehat{f}_2(x)), d(\widehat{f}_2(x), x'')\} \leq 2^{-n}$$

Quindi $\widehat{f}_1(x) \in B^F(x'', n)$, pertanto $B^F(x', n) \cap B^F(x'', n) \neq \emptyset$, per cui $B^F(x', n) = B^F(x'', n)$, ossia

$$f_1(B^F(x,n)) = f_2(B^F(x,n))$$

e dunque $f_1 = f_2$ che è quanto si voleva dimostrare.
- h è *suriettiva*
Siano $f \in M_1 \to^1 M_2$ e $n \in N$. Si vuole mostrare che $B^F(f,n)$ sta nell'immagine di h.
Definiamo una funzione:

$$f^{(n)} \in (F_{MT}(M_1) \to_{BT} F_{MT}(M_2))^{(n)} = (F_{MT}(M_1))^{(n)} \to (F_{MT}(M_2))^{(n)}$$
$$f^{(n)}(B^F(x,n)) = B^F(f(x),n)$$

La funzione $f^{(n)}$ è ben definita, infatti, se $B^F(x,n) = B^F(y,n)$, allora $d(x,y) \leq 2^{-n}$, quindi, essendo f NDI, $d(f(x),f(y)) \leq 2^{-n}$, per cui $B^F(f(x),n) = B^F(f(y),n)$.
Ora, per concludere è sufficiente notare che $\forall x \in M_1.\ d(\widehat{f^{(n)}}(x), f(x)) \leq 2^{-n}$ dato che $\widehat{f^{(n)}}(x) \in f^{(n)}(B^F(x,n)) = B^F(f(x),n)$ e quindi:

$$h(f^{(n)}) = B^F(\widehat{f^{(n)}},n) = B^F(f,n)$$

che è quanto si voleva.
- h è *monotona*
Si vole provare che se $f^{(n)} \sqsubseteq f^{(m)}$ $(n \leq m)$ allora $h(f^{(n)}) \sqsubseteq h(f^{(m)})$.
Sia dunque $f^{(n)} \sqsubseteq f^{(m)}$, ossia

$$\forall x,y \in M_1. B^F(x,n) \sqsubseteq B^F(y,m) \Rightarrow\ f^{(n)}(B^F(x,n)) \sqsubseteq f^{(m)}(B^F(y,m))$$

al solito quando due sfere sono in relazione possiamo supporre che abbiano lo stesso centro, per cui la relazione precedente può essere riscritta:

$$\forall x \in M_1.\ f^{(n)}(B^F(x,n)) \sqsubseteq f^{(m)}(B^F(x,m)) \qquad (*)$$

Per definizione di h:

$$h(f^{(n)}) = B^F(\widehat{f^{(n)}},n)$$
$$h(f^{(m)}) = B^F(\widehat{f^{(m)}},m)$$

e $\forall x \in M_1$ si ha $\widehat{f^{(n)}}(x) \in f^{(n)}(B^F(x,n))$ e $\widehat{f^{(m)}}(x) \in f^{(m)}(B^F(x,m))$, dunque per la relazione $(*)$ si può scrivere che:

$$\widehat{f^{(n)}}(x), \widehat{f^{(m)}}(x) \in f^{(n)}(B^F(x,n))$$

per cui $d(\widehat{f^{(n)}}(x), \widehat{f^{(m)}}(x)) \leq 2^{-n}$.
Dunque $d(\widehat{f^{(n)}}, \widehat{f^{(m)}}) \leq 2^{-n}$, ossia $\widehat{f^{(m)}} \in B^F(\widehat{f^{(n)}},n)$. Si conclude perciò che:

$$h(f^{(n)}) = B^F(\widehat{f^{(n)}},n) \sqsubseteq B^F(\widehat{f^{(m)}},m) = h(f^{(m)})$$

Si osservi che h è ovviamente 'conserva' i livelli ed è monotona. Quindi è una $\mathcal{BT}$-*funzione*, ossia un morfismo in $\mathcal{BT}$.
- h^{-1} è *monotona*
si verifica facilmente che la funzione inversa di h è:

$h^{-1} : F_{MT}(M_1 \to^1 M_2) \to (F_{MT}(M_1) \to_{BT} F_{MT}(M_2))$
$h^{-1}(B^F(f,n)) = \lambda(B^F(x,n)).B^F(f(x),n)$

Sia dunque $B^F(f,n) \sqsubseteq B^F(f,m)$ $(m \leq n)$ (al solito si può supporre che i centri coincidano). Si deve provare che:

$$h^{-1}(B^F(f,n)) \sqsubseteq h^{-1}(B^F(f,m))$$

La relazione suddetta equivale a: $\forall x \in M_1$. $B^F(x,n) \sqsubseteq B^F(x,m)$ (ancora, x centro coincidente delle due sfere) vale:

$$h^{-1}(B^F(f,n))(B^F(x,n)) \sqsubseteq h^{-1}(B^F(f,m))(B^F(x,m))$$

ossia:

$$B^F(f(x),n) \sqsubseteq B^F(f(x),m)$$

che effettivamente vale. Pertanto f è un isomorfismo; quindi si conclude.

□

Vale inoltre anche la proposizione duale:

Proposizione 4.6.13 *Siano D_1 e D_2 due* $\mathcal{BT}$-alberi. *Allora*

$$G_{TM}(D_1) \to^1 G_{TM}(D_2) \cong G_{TM}(D_1 \to_{BT} D_2)$$

Dim:

Vedi proposizione 4.6.7.

□

Powerdomain

Definizione 4.6.6 Sia $(D, \sqsubseteq)$ un $\mathcal{BT}$*-albero*. Si indica con $\mathcal{P}^*(D)$ l'insieme definito per livelli nel modo seguente

$$\mathcal{P}^*(D)^{(i)} = \mathcal{P}_{nfin}(D^{(i)}) = \{S : \emptyset \neq S \subseteq D,\ S \text{ finito}\}$$

Su tale insieme si definisce la relazione $\sqsubseteq_{\mathcal{P}^*}$, che è l'ordinamento di Egli-Milner, nel modo seguente: $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{P}^*(D)$

$$S_1 \sqsubseteq_{\mathcal{P}^*} S_2 \quad \text{se} \quad \begin{array}{l} \forall d_1 \in S_1. \exists d_2 \in S_2.\ d_1 \sqsubseteq d_2 \\ \forall d_2 \in S_2. \exists d_1 \in S_1.\ d_1 \sqsubseteq d_2 \end{array}$$

Proposizione 4.6.14 *Se* $(D, \sqsubseteq)$ *è un* $\mathcal{BT}$-albero *allora* $(\mathcal{P}^*(D), \sqsubseteq_{\mathcal{P}^*})$ *è un* $\mathcal{BT}$-albero.

Dim:

Proviamo che per $(\mathcal{P}^*(D), \sqsubseteq_{\mathcal{P}^*})$ valgono le proprietà della definizione di $\mathcal{BT}$*-albero*.

a. il minimo $\perp_{\mathcal{P}^*(D)}$ è l'unico elemento del livello 0, $\mathcal{P}^*(D)^{(0)} = \{\{\perp_D\}\}$, cioè $\{\ \perp_D\ \}$.

b. Siano $S_1, S_2, S \in \mathcal{P}^*(D)$, con $S_1 \sqsubseteq S$, $S_2 \sqsubseteq S$. Per fissare le idee, poniamo $level(S_1) = n$, $level(S_2) = m$, $level(S) = k$ con $n \le m \le k$.
Allora, per definizione dell'ordine in $\mathcal{P}^*(D)$, per $i = 1, 2$ vale:

$$\forall d_i \in S_i. \exists d \in S.\ d_i \sqsubseteq d$$
$$\forall d \in S. \exists d_i \in S_i.\ d_i \sqsubseteq d$$

dunque $\forall d_1 \in S_1. \exists d \in S.\ d_1 \sqsubseteq d$, ma in corrispondenza a d vi è $d_2 \in S_2$ tale che $d_2 \sqsubseteq d$, e quindi per le proprietà dei $\mathcal{BT}$*-alberi* $d_1 \sqsubseteq d_2$. Dunque $\forall d_1 \in S_1. \exists d_2 \in S_2.\ d_1 \sqsubseteq d_2$.
Allo stesso modo si verifica che $\forall d_2 \in S_2. \exists d_1 \in S_1.\ d_1 \sqsubseteq d_2$.
Si conclude dunque che $S_1 \sqsubseteq S_2$.

c. $\forall S^{(n)} \in \mathcal{P}^*(D)$ (di livello n), si ha che

$$\downarrow S^{(n)} \subseteq \cup_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}^*(D)^{(i)}$$

Ora, essendo i livelli di D finiti, anche i livelli di $\mathcal{P}^*(D)$ lo sono, e quindi $\downarrow S^{(n)}$ è finito.

d. $\forall S^{(n)} \in \mathcal{P}^*(D)$ (di livello n), si ha che

$$Succ(S^{(n)}) \subseteq \mathcal{P}^*(D)^{(n+1)}$$

e quindi è finito.
Inoltre definito un insieme $S^{(n+1)} = \cup_{d \in S^{(n)}} Succ(d)$, si ha che chiaramente $S^{(n+1)} \in Succ(S^{(n)})$, che pertanto è non vuoto.

□

Alla dimostrazione dell'equivalenza del costruttore metrico con quello sugli alberi è opportuno premettere un risultato sulla distanza di Hausdorff:

Definizione 4.6.7 Sia (M, d) uno spazio metrico e sia $\emptyset \neq X \subseteq M$. Definiamo, per $r > 0$, l'insieme:

$$X(r) = \cup_{x \in X} \overline{B(x, r)}$$

Proposizione 4.6.15 *Sia (M, d) uno spazio metrico compatto e siano $X, Y \in \mathcal{P}_{nco}(M)$. Allora:*

$$d_H(X, Y) = \inf\{r : X(r) \supseteq Y \text{ e } Y(r) \supseteq X\}$$

Dim:
Sia

$$d_1 = \max\{\sup_{x \in X} d(x, Y),\ \sup_{y \in Y} d(y, X)\}$$
$$d_2 = \inf\{r : X(r) \supseteq Y \ \ e\ Y(r) \supseteq X\}$$

e proviamo che $d_1 = d_2$, mostrando che vale la disuguaglianza nei due sensi.

$(d_1 \le d_2)$ supponiamo $d_1 = \sup_{x \in X} d(x, Y)$ (l'altro caso è identico).
$\forall r \in \{r : X(r) \supseteq Y \ \ e\ Y(r) \supseteq X\}$, poiché $Y(r) \supseteq X$ si ha che $\forall x \in X. \exists y \in Y.\ d(x, y) \le r$ dunque $d(x, Y) \le r$, e quindi $d_1 = \sup_{x \in X} d(x, Y) \le r$. Si conclude perciò che $d_1 \le d_2$.

$(d_2 \le d_1)$ dimostriamo che, posto $r_1 = \sup_{x \in X} d(x, Y)$, vale:

$Y(r_1) \supseteq X$

Sia $x \in X$. Dunque $d(x,Y) = \inf_{y\in Y} d(x,y) = d(x,y_x)$ ($\leq sup_{x\in X} d(x,Y) = r_1$) (infatti esisterà una successione $(y_n)_{n\in N} \in Y$ tale che $d(x,y_n) \to d(x,Y)$, essendo Y compatto vi è una sottosuccessione convergente $y_{n_k} \to y_x$ e dunque $d(x,Y) = \lim_{k\to\infty} d(x,y_{n_k}) = d(x,y_x)$).
Quindi $x \in \overline{B(y_x,r_1)} \subseteq Y(r_1)$.
Allo stesso modo posto $r_2 = \sup_{y\in Y} d(y,X)$ vale $X(r_2) \supseteq Y$.
Ora $d_1 = \max\{r_1,r_2\}$, quindi $Y(d_1) \supseteq X$ e $X(d_1) \supseteq Y$, per cui $d_2 \leq d_1$.

$\square$

Corollario 4.6.1 *Sia (M,d) un CUM. Allora:*

$$\forall X,Y \in \mathcal{P}_{nco}(M) \quad d_H(X,Y) = \inf\{r : X[r] = Y[r]\}$$

Dim:

È sufficiente osservare che:

$X(r) \supseteq Y$ *e* $Y(r) \supseteq X \Leftrightarrow\ X(r) = Y(r)$

($\Rightarrow$) $\forall y \in Y$, poiché $X(r) \supseteq Y$, vi è $x \in X$ tale che $y \in B(x,r)$. Dunque per l'ultrametricità $B(x,r) = B(y,r)$. Questo consente di concludere che $X(r) \supseteq Y(r)$.
Allo stesso modo $Y(r) \supseteq X(r)$ e quindi si ha la tesi.

($\Leftarrow$) Ovvio.

$\square$

Osservazione 4.6.7 Sia (M,d) uno dei 'nostri' CUM (con metrica a valori in $\{0\} \cup \{2^{-n} : n \in N\}$). I risultati precedenti consentono di concludere che $\forall A, A_1, A_2 \in \mathcal{P}_{nco}(M)$

a. $d_H(A_1,A_2) = \inf\{2^{-n} : n \in N,\ A_1[n] = A_2[n]\}$

b. $B(A,2^{-n}) = \{A' : A'[n] = A[n]\}$

c. se $\forall n \in N.\ A[n] = A'[n]$ allora $A = A'$ (in quanto $d_H(A,A') = 0$)

Proposizione 4.6.16 *Sia (M,d) un CUM. Allora*

$$\mathcal{P}^*(F_{MT}(M)) \cong F_{MT}(\mathcal{P}_{nco}(M))$$

Dim:

Definiamo una funzione h :

$h : F_{MT}(\mathcal{P}_{nco}(M)) \to \mathcal{P}^*(F_{MT}(M))$
$h(B^F(A,n)) = \{B^F(x,n) : x \in A\}$

Iniziamo osservando che la funzione h è *ben definita*. Infatti $\forall A \in \mathcal{P}_{nco}(M)$, $h(B^F(A,n))$ è un insieme finito, per la compattezza di A. Inoltre $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}_{nco}(M)$ se $B^F(A_1,n) = B^F(A_2,n)$ allora $d_H(A_1,A_2) \leq 2^{-n}$ e quindi, per l'osservazione precedente

$$\{B(x,2^{-n}) : x \in A_1\} = A_1[n] = A_2[n] = \{B(x,2^{-n}) : x \in A_2\}$$

e dunque $h(B^F(A_1,n)) = h(B^F(A_2,n))$. Inoltre
- h è *iniettiva*
infatti $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}_{nco}(M)$ se $h(B^F(A_1,n)) = h(B^F(A_2,n))$ allora $A_1[n] = A_2[n]$ e quindi, per l'osservazione precedente $d_H(A_1,A_2) \leq 2^{-n}$, per cui $B^F(A_1,n) = B^F(A_2,n)$
- h è *suriettiva*
Sia $S = \{B^F(x_i,n) : i = 1\dots k\} \in \mathcal{P}^*(F_{MT}M)$ un elemento di livello n. Si vuole mostrare che S sta nell'immagine di h.
Posto $A = \cup_{i=1}^k B(x_i,2^{-n})$, si ha che A è un compatto (in quanto unione finita di compatti), non vuoto. Dunque $B^F(A,n) \in F_{MT}(\mathcal{P}_{nco}(M))$ e chiaramente:

$$h(B^F(A,n)) = S$$

- h è *monotona*
Siano $B^F(A,n) \sqsubseteq B^F(A,m) \in F_{MT}(\mathcal{P}_{nco}(M))$ $(n \leq m)$. Si vuole provare che

$$h(B^F(A,n)) \sqsubseteq h(B^F(A,m))$$

ossia:

$$\{B^F(x,n) : x \in A\} \sqsubseteq \{B^F(x,m) : x \in A\}$$

ma questo è ovviamente vero in quanto $\forall x \in A.\ B^F(x,n) \sqsubseteq B^F(x,m)$.
Si osservi che h è ovviamente 'conserva' i livelli ed è monotona. Quindi è una $\mathcal{BT}$-*funzione*, ossia un morfismo in $\mathcal{BT}$.
- h^{-1} è *monotona*
Per ogni elemento $S = \{B^F(x_i,n) : i = 1\dots k\} \in \mathcal{P}^*(F_{MT}(M))$ di livello n, indichiamo con:

$$\sqcup S = \cup_{i=1}^k B(x_i,2^{-n})$$

Si verifica facilmente che la funzione inversa di h è:

$$h^{-1} : \mathcal{P}^*(F_{MT}(M)) \to F_{MT}(\mathcal{P}_{nco}(M))$$
$$h(S) = B^F(\sqcup S, n)$$

Siano dunque $S_1 = \{B^F(x_i,n) : i = 1\dots k_1\}, S_2 = \{B^F(y_i,m) : i = 1\dots k_2\} \in \mathcal{P}^*(F_{MT}M)$ tali che $S_1 \sqsubseteq S_2$ $(n \leq m)$.
Dunque

$$\forall i.\exists j.\ B^F(x_i,n) \sqsubseteq B^F(y_j,m) \quad \Rightarrow \quad B^F(x_i,n) = B^F(y_j,n)$$
$$\forall j.\exists i.\ B^F(x_i,n) \sqsubseteq B^F(y_j,m) \quad \Rightarrow \quad B^F(x_i,n) = B^F(y_j,n)$$

dalle due segue che $S_1 = \{B^F(y_i,n) : i = 1\dots k_2\}$.
Dunque

$$\sqcup S_1 = \cup_{j=1}^{k_2} B(y_j,2^{-n})$$
$$\sqcup S_2 = \cup_{j=1}^{k_2} B(y_j,2^{-m})$$

dunque $\sqcup S_1[n] = \{B(y_j, 2^{-n}) : j = 1 \ldots k_2\} = \sqcup S_2[n]$, e quindi, in base all'osservazione precedente $d_H(\sqcup S_1, \sqcup S_2) \leq 2^{-n}$.
Si conclude perciò, che, essendo $n \leq m$:

$$h^{-1}(S_1) = B^F(\sqcup S_1, n) \sqsubseteq B^F(\sqcup S_2, m) = h^{-1}(S_2)$$

Pertanto f è un isomorfismo; che è quello che si voleva.

□

Vale inoltre anche la proposizione duale:

Proposizione 4.6.17 *Sia D un* $\mathcal{BT}$-albero. *Allora*

$$\mathcal{P}_{nco}(G_{TM}(D)) \cong G_{TM}(\mathcal{P}^*(D))$$

Dim:

Vedi proposizione 4.6.7.

□

Concludiamo con un'osservazione sulle proprietà della categoria $\mathcal{BT}$:

Osservazione 4.6.8 Osserviamo che $(\mathcal{BT}, \rightarrow_{BT}, \otimes, 1)$ è una categoria catesiana chiusa.

- $\otimes$ è un prodotto; se D_1 e D_2 sono due $\mathcal{BT}$*-alberi* allora $D_1 \otimes D_2$ è un prodotto dei due oggetti, con i morfismi *fst* e *snd* definiti:

  $$\mathit{fst}((d_1, d_2)) = d_1$$
  $$\mathit{snd}((d_1, d_2)) = d_2$$

- $\rightarrow^{BT}$ è un esponenziale; se D_1 e D_2 sono due $\mathcal{BT}$*-alberi* allora $D_1 \rightarrow_{BT} D_2$ è un esponenziale dei due oggetti, con la funzione di applicazione definita da:

  $$\mathit{apply}(f^{(i)}, d^{(i)}) = f^{(i)}(d^{(i)})$$

  e data una $\mathcal{BT}$*-funzione* $f : D_1 \otimes D_2 \rightarrow D_3$ il morfismo $\mathit{curry}(f)$ definito:

  $$\mathit{curry}(f)(d_1^{(i)}) = f(d_1^{(i)}, \star)_{|D_2{}^{(i)}}$$

- l'oggetto terminale 1 è un qualunque $\mathcal{BT}$*-albero* privo di ramificazioni, cioè $\{d_i : i \in N\}$, con l'ordine $\sqsubseteq = \{(d_i, d_{i+1}) : i \in N\}^*$ [1]

[1] $*$ indica la chiusura transitiva della relazione

Capitolo 5

Un Teorema di Punto Fisso in una Categoria di Spazi Metrici Completi

L'ambiente degli spazi metrici completi è molto utile per assegnare una semantica denotazionale ai linguaggi di programmazione, in special modo ai linguaggi concorrenti. Ad esempio nell'approccio di De Bakker e Zucker [2] un processo è rappresentato mediante un elemento di un opportuno spazio metrico, nel quale la distanza tra tra due processi è definita in modo che più piccola è la distanza più tempo sarà richiesto affinché i due processi mostrino un comportamento diverso.

Per ottenere uno spazio metrico i cui elementi rappresentino i processi nel modo desiderato si deve risolvere un'equazione di dominio ricorsiva. Ad esempio, un semplice linguaggio nel quale un processo è una sequenza di azioni atomiche (non interpretate) porta all'equazione:

$$P \cong \{p_0\}\bar{\cup}(A \times P)$$

dove A è l'insieme delle azioni atomiche e p_0 un elemento fissato (processo nullo). In [2] queste equazioni sono risolte essenzialmente partendo da uno spazio metrico di base ($\{p_0\}$), arricchendolo iterativamente sulla base dell'equazione e considerando infine il completamento metrico dell'unione degli spazi così ottenuti.

Tale tecnica, però, in alcuni casi non funziona, ad esempio quando la variabile dominio P compare a sinistra dell'operatore di costruzione dello spazio di funzioni, ad esempio:

$$P \cong \{p_0\}\bar{\cup}(P \to P)$$

La tecnica presentata è una generalizzazione della tecnica di De Bakker e Zucker, basata sull'introduzione di una categoria di spazi metrici completi. In tale ambiente l'equazione di dominio viene interpretata come un'equazione:

$$P \cong F(P)$$

dove F è un endofuntore sulla categoria. Vedremo le condizioni che il funtore F deve soddisfare affinché l'equazione ammetta soluzione e ulteriori ipotesi che garantiscono l'unicità di tale soluzione.

5.1 Una Categoria di Spazi Metrici Completi

In questa sezione è definita una categoria di spazi metrici completi $\mathcal{C}_M$. Quindi è introdotta la nozione di *torre convergente* in $\mathcal{C}_M$ e viene descritta la costruzione del *limite diretto* per tali torri.
È interessante notare la corrispondenza esistente con le nozioni metriche. Una torre convergente, può essere vista come la generalizzazione a livello categoriale di una successione di Cauchy e la costruzione del limite diretto come la controparte dell'operazione di passaggio al limite.

Definizione 5.1.1 Si indica con $\mathcal{C}_M$ la categoria avente come oggetti *spazi metrici completi.* I morfismi in $\mathcal{C}_M$ sono definiti nel modo seguente. Siano M_1 e M_2 spazi metrici completi. Allora un morfismo $M_1 \stackrel{t}{\to} M_2$ è una coppia di funzioni $t = \langle i, j \rangle$, $i : M_1 \to M_2$ e $j : M_2 \to M_1$ che soddisfano le proprietà:

a. i è un isometric embedding

b. j è NDI

c. $j \circ i = id_{M_1}$

Dominio, codominio e composizione dei morfismi e morfismo identità sono definiti nel modo ovvio.
Un morfismo sarà anche detto *ep-pair* (embedding - projection pair).

Se vi è un morfismo $M_1 \stackrel{t}{\to} M_2$ possiamo considerare M_1 una approssimazione di M_2 nel senso che, dato che M_1 può essere 'incorporato', tramite un isometric embedding, in M_2, M_1 contiene meno informazioni di M_2. Per un elemento $x_2 \in M_2$ la sua migliore approssimazione in M_1 è data da $j(x_2)$. La condizione c impone che j rappresenti un isometria tra $i(M_1)$ e M_1.

Definizione 5.1.2 Sia $M_1 \stackrel{t}{\to} M_2$ un morfismo in $\mathcal{C}_M$, $t = \langle i, j \rangle$. Definiamo:

$$\delta(t) = d_{M_2 \to M_2}(i \circ j, id_{M_2}) \quad (= \sup_{x_2 \in M_2}\{d_{M_2}(i(j(x_2)), x_2)\}).$$

Osserviamo che $\delta(t)$ può essere interpretato come una misura della 'precisione' con cui M_1 approssima M_2. Più $\delta(t)$ è piccolo, più densamente M_1 si incorpora in M_2.

La nozione categoriale di torre può essere pensata come una generalizzazione della nozione di successione crescente. Vogliamo ora definire un concetto che ricorda quello metrico di successione di Cauchy:

Definizione 5.1.3 Una torre $(M_n, t_n)_{n \in N}$ in $\mathcal{C}_M$ si dice una *torre convergente* se

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in N. \; \forall m > n \geq n_0. \; \delta(t_{nm}) \leq \varepsilon$$

con $t_{nm} = t_{m-1} \circ \ldots \circ t_n$.

Continuiamo quindi introducendo la *costruzione del limite diretto* per una torre convergente in $\mathcal{C}_M$. Tale costruzione generalizza la tecnica di costruzione del completamento metrico dell'unione di una sequenza di spazi metrici 'inclusi' usata in [2] (per un analisi approfondita della relazione esistente tra le due tecniche si rimanda a [1]). Il *lemma di inizialità* fornisce un criterio per stabilire l'inizialità di un cono per una torre convergente che ci consentirà di concludere che il limite diretto di una torre convergente è un cono iniziale per la torre.

Lemma 5.1.1 *Sia $(M_n, t_n)_{n \in N}$ una torre convergente in $\mathcal{C}_M$ e sia $(M, (\gamma_n)_{n \in N})$, con $\gamma_n = \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$, un cono per la torre. Allora:*

$$M \textit{ è un cono iniziale} \quad \text{sse} \quad \lim_{n \to \infty} \alpha_n \circ \beta_n = id_M \quad (\textit{o equiv.} \lim_{n \to \infty} \delta(\gamma_n) = 0)$$

Definizione 5.1.4 (Costruzione del Limite Diretto) Sia $(M_n, t_n)_{n \in N}$ una torre convergente in $\mathcal{C}_M$, con $t_n = \langle i_n, j_n \rangle$. Si dice *limite diretto* di $(M_n, t_n)_{n \in N}$ un cono $(M, (\gamma_n)_{n \in N})$, con $\gamma_n = \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$ definito nel modo seguente:

a. lo spazio metrico M ha come elementi:

$$M = \{(x_n)_{n \in N} : \forall n \in N. \; x_n \in M_n \textit{ e } x_n = j_n(x_{n+1})\}$$

ed è dotato di una metrica d:

$$d((x_n)_{n \in N}, (y_n)_{n \in N}) = \sup_{n \in N} d_{M_n}(x_n, y_n) \quad \forall (x_n)_{n \in N}, (y_n)_{n \in N} \in M$$

b. i morfismi γ_n sono definiti:

- $\alpha_n : M_n \to M$
  $\alpha_n(x) = (x_k)_{k \in N}$
  con
  $$x_k = \begin{cases} j_{kn}(x) & \textit{se } k < n \\ x & \textit{se } k = n \\ i_{nk}(x) & \textit{se } k > n \end{cases}$$
- $\beta_n : M \to M_n$
  $\beta_n((x_k)_{k \in N}) = x_n$

Si dimostra che M così definito è effettivamente uno spazio metrico completo e $(M, (\gamma_n)_{n \in N})$ è un cono per la torre $(M_n, t_n)_{n \in N}$.

A questo punto utilizzando il Lemma di Inizialità si conclude immediatamente l'inizialità del limite diretto, cioè:

Proposizione 5.1.1 *Il limite diretto di una torre convergente è un cono iniziale per tale torre.*

5.2 Un Teorema di Punto Fisso

In questa sezione vedremo quali condizioni su di un funtore $F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ garantiscono l'esistenza e l'unicità del punto fisso. In primo luogo si mostrerà che ogni funtore *contraente* ha un punto fisso e successivamente si verificherà che, se alla richiesta di contraenza si aggiunge anche quella che il funtore sia *Hom-contraente*, si conclude anche l'unicità (a meno di isomorfismi) del punto fisso.

Iniziamo introducendo la nozione di funtore contraente, che, in un certo senso, corrisponde alla nozione metrica di contrazione. Intuitivamente un funtore è contraente se mappa ogni embedding in un embedding più denso, ovvero se dato un morfismo $M_1 \xrightarrow{t} M_2$ (dunque M_1 approssimazione di M_2) allora FM_1 approssima FM_2 meglio di quanto M_1 approssimi M_2. Formalmente:

Definizione 5.2.1 Un funtore $F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ si dice *contraente* se $\exists \varepsilon,\ 0 \leq \varepsilon < 1$, tale che per ogni morfismo $M_1 \xrightarrow{t} M_2$ vale

$$\delta(Ft) \leq \varepsilon\ \delta(t)$$

Ora è noto che una contrazione su di uno spazio metrico è continua, dunque preserva le successioni di Cauchy e i loro limiti. Analogamente un funtore contraente preserva le torri convergenti e i loro coni iniziali, cioè vale il seguente risultato, conseguenza immediata del Lemma di Inizialità:

Proposizione 5.2.1 *Sia $F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ un funtore contraente, sia $(M_n, t_n)_{n \in N}$ una torre convergente e sia $(M, (\gamma_n)_{n \in N})$ un suo cono iniziale. Allora $(FM_n, Ft_n)_{n \in N}$ è ancora una torre convergente e $(FM, (F\gamma_n)_{n \in N})$ è un suo cono iniziale.*

A questo punto, utilizzando il teorema di punto fisso categoriale (3.3.1), si conclude l'esistenza del punto fisso per funtori contraenti, cioè:

Teorema 5.2.1 (Esistenza del Punto Fisso) *Sia $F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ un funtore contraente. Allora F ha punto fisso, ovvero vi è uno spazio metrico completo M in $\mathcal{C}_M$ tale che*

$$M \cong FM$$

Dim:

Sia M_0 lo spazio costituito da un solo punto, cioè $M_0 = \{x_0\}$. Osserviamo che vi è sempre un morfismo $M_0 \xrightarrow{t_0} FM_0$, infatti t_0 può essere definito $t_0 = \langle i_0, j_0 \rangle$, con $i_0(x_0) = x_1$, con $x_1 \in FM_0$ qualsiasi, e $j_0(x) = x_0$ per ogni $x \in FM_0$.
Inoltre se definiamo la torre $(F^n M_0, F^n t_0)_{n \in N}$, per la contrattività di F questa è una torre convergente, ha come cono iniziale il limite diretto $(M, (\gamma_n)_{n \in N})$ e sia la torre che il cono iniziale sono preservati da F.
Utilizzando il teorema di punto fisso categoriale (3.3.1), quindi, si conclude.

□

Ora, sappiamo che una contrazione su di uno spazio metrico ha un *unico* punto fisso. Vorremmo provare un risultato analogo per i funtori contraenti su $\mathcal{C}_M$.

Sia $F : \mathcal{C}_M \rightarrow \mathcal{C}_M$ un funtore contraente. Per il teorema 5.2.1 F ha un punto fisso, ovvero esiste uno spazio metrico completo M, limite diretto della torre $(F^n M_0, F^n t_0)_{n \in N}$, tale che $M \cong FM$. Sia dunque κ isomorfismo:

$$M \stackrel{\kappa}{\rightarrow} FM$$

Sia M' un altro punto fisso e sia λ un ismorfismo tra M' e FM':

$$M' \stackrel{\lambda}{\rightarrow} FM'$$

Se M' fosse anch'esso un cono per la torre $(F^n M_0, F^n t_0)_{n \in N}$, allora per l'inizialità di M esisterebbe un morfismo $M \stackrel{t}{\rightarrow} M'$ e quindi un isometric embedding di M in M'. Se a questo punto provassimo che t è un'isometria potemmo concludere che $M \cong M'$ e quindi che il funtore F ha un unico punto fisso. La dimostrazione che t è un'isometria può basarsi sulla validità di una relazione del tipo:

$$\delta(t) = \delta(Ft) \leq \varepsilon \delta(t)$$

che prova che $\delta(t) = 0$ e quindi che, oltre che $j \circ i = id_M$ (def. di morfismo) anche $i \circ j = id_{M'}$, e quindi che t è un'isometria.

Per dimostrare che effettivamente M' è un cono per la torre $(F^n M_0, F^n t_0)_{n \in N}$, dapprima ci si restringe alla *categoria degli spazi metrici completi puntati*, $\mathcal{C}_M^*$. In tale categoria si dimostra il suddetto risultato di unicità. Per estendere tale risultato alla categoria $\mathcal{C}_M$ si richiede che il funtore F sia anche Hom-contraente, ovvero che sia contrattivo come funzione $F : Hom(M_1, M_2) \rightarrow Hom(FM_1, FM_2)$

Definizione 5.2.2 Si indica con $\mathcal{C}_M^*$ la categoria degli *spazi metrici completi puntati*, avente come oggetti delle triple $< M, d, x >$ con (M, d) spazio metrico completo e $x \in M$ un punto fissato (detto *punto base*). I morfismi in $\mathcal{C}_M^*$ sono definiti come in $\mathcal{C}_M$ con l'ulteriore vincolo che se $< M_1, d_1, x_1 > \stackrel{t}{\rightarrow} < M_2, d_2, x_2 >$ è un morfismo, con $t = \langle i, j \rangle$, allora i e j mappano punti base in punti base, ossia $i(x_1) = x_2$ e $j(x_2) = x_1$.

Tutti le nozioni ed i risultati visti per la categoria $\mathcal{C}_M$ si estendono in modo ovvio alla nuova categoria $\mathcal{C}_M^*$.

Si dimostra quindi in $\mathcal{C}_M^*$ il seguente:

Teorema 5.2.2 (Unicità del Punto Fisso in $\mathcal{C}_M^*$) *Sia $F : \mathcal{C}_M^* \rightarrow \mathcal{C}_M^*$ un funtore contraente. Allora F ha un unico punto fisso, a meno di isometrie, ovvero vi è uno spazio metrico completo puntato M in $\mathcal{C}_M^*$ tale che:*

a. $M \cong FM$

b. $\forall M' \in \mathcal{C}_M^*.\ FM' \cong M' \Rightarrow M \cong M'$

Dim:

Il fatto fondamentale è che la categoria $\mathcal{C}_M^*$ ha un oggetto iniziale:

$$M_0 =< \{x_0\}, d_{\{x_0\}}, x_0 >$$

Il punto fisso di F può dunque essere definito come limite diretto $(M, (\gamma_n)_{n\in N})$ della torre convergente $(F^n M_0, F^n t_0)_{n\in N}$, con t_0 *unico* (per l'inizialità di M_0) morfismo tra M_0 e FM_0. Indichiamo con $\kappa : M \to FM$ l'isometria tra M e FM.
A questo punto, detto M' un altro punto fisso e λ l'isometria tra M' e FM', definita la successione di morfismi $(\tilde{\gamma}_n)_{n\in N}$

$$\tilde{\gamma}_0 \text{ è l'unico morfismo tra l'oggetto iniziale e } M$$
$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \lambda^{-1} \circ F\tilde{\gamma}_n$$

si prova per induzione, sfruttando l'inizialità di M_0, che $(M', (\tilde{\gamma}_n)_{n\in N})$ è un cono per la torre convergente $(F^n M_0, F^n t_0)_{n\in N}$. Dunque, essendo M cono iniziale per tale torre vi è un unico morfismo $M \xrightarrow{t} M'$
A questo punto si osserva, sfruttando la commutatività dei diagrammi, che $t = \lambda^{-1} \circ Ft \circ \kappa$ e quindi, essendo λ e κ isometrie:

$$\delta(Ft) = \delta(t)$$

che è quanto si voleva. Dunque t è un isometria, per cui:

$$M \cong M'$$

□

Torniamo ora alla categoria $\mathcal{C}_M$ degli spazi metrici completi. Come premesso in questo caso per avere l'unicità del punto fisso si deve aggiungere una condizione sul funtore F. Nel caso della dimostrazione in $\mathcal{C}_M^*$ era fondamentale avere un unico morfismo $\tilde{\gamma}_0 : M_0 \to M'$; questo infatti garantiva la validità della relazione:

$$\lambda^{-1} \circ F\tilde{\gamma}_0 \circ t_0 = \tilde{\gamma}_0 \qquad (*)$$

In $\mathcal{C}_M$ tale morfismo non è unico, tuttavia se richiediamo che F, come funzione $F : Hom(M_0, M') \to Hom(FM_0, FM')$, sia contrattivo, allora

$$G : Hom(M_0, M') \to Hom(M_0, M')$$

definito da

$$G(\tilde{\gamma}) = \lambda^{-1} \circ F\tilde{\gamma} \circ t_0$$

è una contrazione in uno spazio metrico completo e quindi si può definire $\tilde{\gamma}_0$ come l'unico punto fisso di G, riottenendo la validità della relazione $(*)$.

Queste considerazioni portano alla definizione di Hom-contrattività:

Definizione 5.2.3 Un funtore $F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ si dice *Hom-contraente* se $\forall M_1, M_2$ in $\mathcal{C}_M$ $\exists \varepsilon,\ 0 \le \varepsilon < 1$ tale che

$F_{|Hom(M_1,M_2)} \in Hom(M_1, M_2) \to^{\varepsilon} Hom(FM_1, FM_2)$

Vale quindi il risultato:

Teorema 5.2.3 (Unicità del Punto Fisso in $\mathcal{C}_M$) *Sia $F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ un funtore contraente e Hom-contraente. Allora F ha un unico punto fisso, a meno di isometrie, ovvero vi è uno spazio metrico completo M in $\mathcal{C}_M$ tale che:*

a. $M \cong FM$

b. $\forall M' \in \mathcal{C}_M.\ FM' \cong M' \Rightarrow M \cong M'$

5.3 Una Classe di Equazioni con un'Unica Soluzione in $\mathcal{C}_M$

In questa sezione presentiamo una classe di equazioni di dominio nella categoria $\mathcal{C}_M$, con un unica soluzione. A tale scopo, in primo luogo definiremo la classe *Funct* di funtori su $\mathcal{C}_M$ e formuleremo una condizione per i suoi elementi che implica la contrattività e l'Hom-contrattività. Quindi, seguirà che ogni equazione di dominio su $\mathcal{C}_M$, indotta da un funtore che soddisfa tale condizione, ha soluzione unica.

Definizione 5.3.1 La classe $\mathcal{F}$ è definita come un linguaggio sull'alfabeto:

$$\{F_{M_0}, \tfrac{1}{2}, \times, \bar{\cup}, \to^1, \mathcal{P}_{ncl}, \circ\}$$

dove (M_0, d_0) è un generico spazio metrico completo. La definizione è la seguente: $F \in$ *Funct*:

$$F ::= F_{M_0} \ \mid\ F_{\frac{1}{2}} \ \mid\ F \times F \ \mid\ F \bar{\cup} F \ \mid\ F {\to^1} F \ \mid\ \mathcal{P}_{ncl}(F) \ \mid\ F \circ F$$

Ogni elemento $F \in$ *Funct* è interpretato come un funtore:

$$F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$$

Si procede in modo induttivo. Siano (M, d_M) e (N, d_N) spazi metrici completi e sia $M \stackrel{t}{\to} N$ un morfismo, con $t = \langle i, j \rangle$. Per la definizione di ciascun $F \in$ *Funct* si specifica:

i. l'immagine di (M, d_M) tramite F, cioè $F(M, d_M)$

ii. l'immagine di t tramite F, cioè Ft

Per semplificare la notazione, nel caso di funtori definiti sulla base di altri funtori F_1 e F_2, supporremo che $F_iM = M_i$, $F_iN = N_i$ e $F_it = t_i = \langle i_i, j_i \rangle$. per $i = 1, 2$.
La definizione è la seguente:

a. $F = F_{M_0}$

   (a) $F_{M_0}(M, d_M) = (M_0, d_0)$

   (b) $F_{M_0}t = \langle id_{M_0}, id_{M_0} \rangle$

b. $F = F_{1\frac{1}{2}}$

   (a) $F_{1\frac{1}{2}}(M, d_M) = (M_1, d_{M_1})_{\frac{1}{2}}$

   (b) $F_{1\frac{1}{2}} t = t$

c. $F = F_1 \times F_2$

   (a) $F_1 \times F_2(M, d_M) = (M_1, d_{M_1}) \times (M_2, d_{M_2})$

   (b) $(F_1 \times F_2)t = \langle \lambda(x_1, x_2).\ (i_1(x_1), i_2(x_2)), \lambda(y_1, y_2).\ (j_1(y_1), j_2(y_2)) \rangle$

d. $F = F_1 \bar{\cup} F_2$

   (a) $F_1 \bar{\cup} F_2(M, d_M) = (M_1, d_{M_1}) \bar{\cup} (M_2, d_{M_2})$

   (b) $(F_1 \bar{\cup} F_2)t = \langle \lambda(i, x).\ (i, i_i(x)), \lambda(i, y).\ (i, j_i(y)) \rangle$

e. $F = F_1 \to^1 F_2$

   (a) $F_1 \to^1 F_2(M, d) = (M_1, d_{M_1}) \to^1 (M_2, d_{M_2})$

   (b) $(F_1 \to^1 F_2)t = \langle \lambda f. i_2 \circ f \circ j_1, \lambda g. j_2 \circ g \circ i_1 \rangle$

f. $F = \mathcal{P}_{ncl}(F_1)$

   (a) $\mathcal{P}_{ncl}(F_1)(M, d_M) = \mathcal{P}_{ncl}((M_1, d_{M_1}))$

   (b) $\mathcal{P}_{ncl}(F_1)t = \langle \lambda X. \{i_1(x) : x \in X\}, \lambda Y. \overline{\{j_1(y) : y \in Y\}} \rangle$

g. $F_1 \circ F_2$ è l'usuale composizione di funtori.

Si dimostra, per induzione sulla struttura di *Funct* che la precedente è una buona definizione, ovvero che per ogni $F \in$ *Funct*, $F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ è un funtore ben definito.

A questo punto si associa a ciascun funtore $F \in$ *Funct* un coefficiente $c(F)$ che rappresenta una misura della contrattività di F
Questo consentirà di stabilire in modo semplice che un funtore $F \in$ *Funct* è contraente ed Hom-contraente e quindi ha un unico punto fisso in $\mathcal{C}_M$.

Definizione 5.3.2 Ad ogni funtore $F \in \mathcal{F}$ si associa un *coefficiente di contrattività* $c(F)$, definito induttivamente come segue:

a. $c(F_{M_0}) = 0$

b. $c(F_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ c(F)$

c. $c(F_1 \times F_2) = \max\{c(F_1), c(F_2)\}$

d. $c(F_1 \bar{\cup} F_2) = \max\{c(F_1), c(F_2)\}$

e. $c(F_1 \to^1 F_2) = c(F_1) + c(F_2)$ $\quad$ ($\max\{c(F_1), c(F_2)\}$ se gli spazi sono ultrametrici)

f. $c(\mathcal{P}_{ncl}(F)) = c(F)$

g. $c(F_1 \circ F_2) = c(F_1)\ c(F_2)$

Proposizione 5.3.1 *Sia F un funtore in Funct. Allora:*

a. $\forall M \xrightarrow{t} N.\ \delta(Ft) \leq c(F)\ h(t)$

b. $\forall M, N.\ F_{|Hom(M,N)} \in Hom(M,N) \to^{c(F)} Hom(FM, FN)$

A questo punto, si ha un immediato corollario, che consente di individuare una classe di equazioni di dominio in $\mathcal{C}_M$, aventi un unica soluzione in tale categoria (a meno di isomorfismi):

Corollario 5.3.1 *Ogni equazione di dominio riflessiva in $\mathcal{C}_M$ della forma:*

$$M \cong FM$$

con $F \in \mathcal{F}$, tale che $c(F) < 1$, ha un unica soluzione, a meno di isomorfismi.

Dim:

È sufficiente osservare che se $c(F) < 1$, allora per la proposizione precedente F è contraente ed Hom-contraente e quindi si conclude per il teorema di punto fisso 5.2.1 in $\mathcal{C}_M$.

$\square$

5.4 Estensione ai CUM

Indichiamo con $\mathcal{CUM}ep$ la categoria avente come oggetti gli spazi ultrametrici compatti, e come morfismi ancora le ep-pair. I risultati presentati in questo capitolo valgono chiaramente anche per tale categoria. Infatti ogni spazio compatto è completo, dunque i risultati provati per $\mathcal{C}_M$ si provano anche per $\mathcal{CUM}ep$.

Ci si potrebbe chiedere se effettivamente la costruzione del limite diretto, applicata ad una torre convergente di CUM, fornisca un CUM. La risposta è affermativa: sia $(M_n, t_n)_{n\in N}$ una torre convergente di CUM e sia $(M, (\gamma_n)_{n\in N})$ il limite diretto di tale successione definito come in 5.1.4. Allora per i risultati precedenti M è completo ed inoltre si verifica immediatamente che (M, d) è uno spazio ultrametrico. Per quanto riguarda la compattezza di M, si osserva che M è completo, per cui è sufficiente dimostrare che è totalmente limitato. Sia quindi $r > 0$ fissato. Per la convergenza della torre, vi è $n_0 \in N$ tale che

$$\forall m > n \geq n_0.\ \delta(t_{nm}) \leq \tfrac{r}{2} \qquad (1)$$

Essendo M_{n_0} compatto, e quindi totalmente limitato vi è un insieme finito di punti $F_{n_0} \subseteq M_{n_0}$, tale che

$$M_{n_0} = \cup_{x_{n_0}\in F_{n_0}} B(x_{n_0}, \tfrac{r}{2}) \qquad (2)$$

Proviamo che

$$M = \cup_{x_{n_0}\in F_{n_0}} B(\alpha_{n_0}(x_{n_0}), r)$$

Sia $(y_n)_{n\in N} \in M$, consideriamo $x_{n_0} \in F_{n_0}$ tale che

$$d_{M_{n_0}}(y_{n_0}, x_{n_0}) \leq \frac{r}{2}$$

che esiste per (2) e sia $(x_n)_{n\in N} = \alpha_{n_0}(x_{n_0})$.
Osserviamo che la successione $(d_{M_n}(x_n, y_n))_{n\in N}$ è crescente, dato che le funzioni j_n sono NDI e

$$d_{M_n}(x_n, y_n) = d_{M_n}(j_n(x_{n+1}), j_n(y_{n+1})) \leq d_{M_{n+1}}(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Dunque si ha che

$$\begin{aligned}
& d((y_n)_{n\in N}, (x_n)_{n\in N}) = \\
& \quad = sup_{n\in N} d_{M_n}(y_n, x_n) = \qquad \text{dato che la succ. è crescente} \\
& \quad = sup_{n\geq n_0} d_{M_n}(y_n, x_n) = \\
& \quad = sup_{n\geq n_0} d_{M_n}(y_n, i_{n_0 n}(x_{n_0})) \leq \\
& \quad \leq sup_{n\geq n_0} d_{M_n}(y_n, i_{n_0 n} \circ j_{n_0 n}(y_n)) + d_{M_n}(i_{n_0 n} \circ j_{n_0 n}(y_n), i_{n_0 n}(x_{n_0})) \leq \qquad \text{per (1)} \\
& \quad \leq sup_{n\geq n_0} \frac{r}{2} + d_{M_n}(i_{n_0 n} \circ j_{n_0 n}(y_n), i_{n_0 n}(x_{n_0})) = \qquad \text{poichè } i_{n_0} \text{ è un'isometria} \\
& \quad = sup_{n\geq n_0} \frac{r}{2} + d_{M_{n_0}}(j_{n_0 n}(y_n), x_{n_0}) = \\
& \quad = sup_{n\geq n_0} \frac{r}{2} + d_{M_{n_0}}(y_{n_0}, x_{n_0}) = \qquad \text{per la scelta di } x_{n_0} \\
& \quad \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = \\
& \quad = r
\end{aligned}$$

quindi $(y_n)_{n\in N} \in B(\alpha_{n_0}(x_{n_0}), r)$, che è quanto si voleva.

Capitolo 6

Un Teorema di Punto Fisso in una Categoria di $\mathcal{BT}$-alberi

Nel capitolo precedente abbiamo presentato un risultato di punto fisso per funtori nella categoria $\mathcal{C}_M$ degli spazi metrici completi ed abbiamo visto come questo risultato può essere particolarizzato anche alla categoria $\mathcal{CUM}ep$ degli spazi ultrametrici compatti. La sostanziale equivalenza tra gli spazi ultrametrici compatti ed i *$\mathcal{BT}$-alberi*, provata nel capitolo 4, suggerisce dunque la possibilità di estendere i risultati metrici ai *$\mathcal{BT}$-alberi*.

In primo luogo definiremo per i *$\mathcal{BT}$-alberi* le nozioni di *embedding* e *projection* e quindi la categoria $\mathcal{BT}ep$ avente come oggetti i *$\mathcal{BT}$-alberi* e come morfismi le *ep-pair*. In tale categoria (equivalente a $\mathcal{CUM}ep$) introdurremo le nozioni di *torre convergente*, *funtore contraente* e la costruzione del *limite diretto*, e proveremo l'equivalenza tra queste nozioni e le corrispondenti nozioni metriche. Infine dimostreremo l'esistenza e l'unicità del punto fisso per funtori contraenti. La restrizione ai *$\mathcal{BT}$-alberi*, che in ambito metrico corrisponde alla restrizione ai CUM, permette di provare l'unicità del punto fisso per funtori contraenti senza l'introduzione dell'ipotesi di *Hom-contraenza*.

6.1 La Categoria $\mathcal{BT}ep$

In questa sezione viene introdotta la categoria $\mathcal{BT}ep$, avente come oggetti i *$\mathcal{BT}$-alberi* e come morfismi le *ep-pair*. Nel caso metrico un'ep-pair tra due spazi M_1 e M_2 rappresenta un isometria tra M_1 ed un sottopazio di M_2, in modo che M_1 possa essere visto come un'approssimazione di M_2. Allo stesso modo, per i *$\mathcal{BT}$-alberi*, un'ep-pair di D_1 in D_2 è definita in modo da rappresentare un isomorfismo (di strutture ordinate) tra D_1 ed un sottoalbero di D_2. Dato che una *$\mathcal{BT}$-funzione* è per definizione monotona, affinché rappresenti un embedding, è sufficiente richiederne l'iniettività.

Definizione 6.1.1 Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$*-alberi*. Si dice *embedding* di D_1 in D_2 una $\mathcal{BT}$*-funzione* $i : D_1 \to D_2$ iniettiva.

Proviamo quindi che la nozione di embedding sui $\mathcal{BT}$*-alberi* corrisponde alla nozione metrica di isometric embedding:

Proposizione 6.1.1 *Siano M_1 e M_2 due CUM e sia $i_M : M_1 \to M_2$ un isometric embedding. Allora $F_{MT}(i_M) : F_{MT}(M_1) \to F_{MT}(M_2)$ è un embedding.*

Dim:

Iniziamo osservando che un isometric embedding è una funzione NDI, dunque $F_{MT}(i_M)$ è una $\mathcal{BT}$*-funzione*.
Inoltre $F_{MT}(i_M)$ è iniettiva. Infatti siano $B^F(x,n), B^F(y,m) \in F_{MT}(M_1)$ tali che

$$F_{MT}(i_M)(B^F(x,n)) = F_{MT}(i_M)(B^F(y,m))$$

dunque, per definizione di F_{MT}, si ha $B^F(i_M(x),n) = B^F(i_M(y),m)$, pertanto $n = m$ e $d(i_M(x), i_M(y)) \leq 2^{-n}$. Essendo i_M isometrica, ne segue che $d(i_M(x), i_M(y)) = d(x,y) \leq 2^{-n}$, per cui

$$B^F(x,n) = B^F(y,m)$$

che è quanto si voleva.

□

Proposizione 6.1.2 *Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$*-alberi *e sia $i : D_1 \to D_2$ un embedding. Allora $G_{TM}(i) : G_{TM}(D_1) \to G_{TM}(D_2)$ è un isometric embedding*

Dim:

Iniziamo osservando che un embedding è, in particolare, una $\mathcal{BT}$*-funzione*, dunque $G_{TM}(i)$ è un funzione NDI.
Inoltre $G_{TM}(i)$ è isometrica. Infatti date $(d^{(i)})_{i \in N}, (d'^{(i)})_{i \in N} \in G_{TM}(D_1)$ si ha che:

$$\begin{aligned}
&\delta^*(G_{TM}(i)((d^{(i)})_{i\in N}), G_{TM}(i)((d'^{(i)})_{i\in N})) = \\
&\quad = \delta^*((i(d^{(i)}))_{i\in N}, (i(d'^{(i)}))_{i\in N}) = \\
&\quad = \inf\{2^{-n} : i(d^{(n)}) = i(d'^{(n)})\} = && \text{iniettività di } i \\
&\quad = \inf\{2^{-n} : d^{(n)} = d'^{(n)}\} = \\
&\quad = \delta^*((d^{(i)})_{i\in N}, (d'^{(i)})_{i\in N})
\end{aligned}$$

□

A questo punto si introduce in modo naturale la nozione di ep-pair e quindi la categoria $\mathcal{BT}ep$:

Definizione 6.1.2 Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$*-alberi*. Un *ep-pair* (embedding-projection pair) t di D_1 in D_2 è una coppia di $\mathcal{BT}$*-funzioni* $\langle i, j \rangle$, $i : D_1 \to D_2$ e $j : D_2 \to D_1$, tali che

a. i è un embedding

b. $j \circ i = id_{D_1}$

Definizione 6.1.3 Si indica con $\mathcal{BT}ep$ la categoria avente come oggetti $\mathcal{BT}$*-alberi* e come morfismi le coppie *ep-pair* tra questi.

Ora, se esiste un morfismo $D_1 \stackrel{t}{\to} D_2$, D_1 può essere visto come un'approssimazione di D_2. Come nel caso metrico, si associa a t un valore $h(t)$ che rappresenta la 'qualità' con cui l'albero D_1 approssima D_2. Più precisamente $h(t)$ è la massima altezza h per cui i sottoalberi finiti di D_1 e D_2 di altezza h sono isomorfi.

Definizione 6.1.4 Sia $D_1 \stackrel{t}{\to} D_2$ un morfismo in $\mathcal{BT}ep$, $t = \langle i, j \rangle$. Definiamo $h(t)$ a valori in $N \cup \{+\infty\}$:

$$\begin{aligned} h(t) &= \sup\{n : (i \circ j)_{|D_2{}^{(n)}} = id_{D_2{}^{(n)}}\} \\ &= \sup\{n : \forall d^{(n)} \in D_2{}^{(n)}.\ i(j(d^{(n)})) = d^{(n)}\} \end{aligned}$$

Continuiamo dunque con alcune osservazioni e risultati che evidenziano il significato del parametro $h(t)$ associato ad un morfismo t.

Definizione 6.1.5 Sia D un $\mathcal{BT}$*-albero* e sia $k \in N$. Indichiamo con $\mathcal{T}_k(D)$ il sottoalbero finito di altezza k di D. Formalmente:

$$\mathcal{T}_k(D) = \cup_{i=0}^{k} D^{(i)}$$

con l'ordine indotto dall'ordine di D.

Proposizione 6.1.3 *Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$-*alberi *e siano $f, g : D_1 \to D_2$ due $\mathcal{BT}$-*funzioni. *Se $f_{|D_1{}^{(k)}} = g_{|D_1{}^{(k)}}$ allora:*

$$f_{|D_1{}^{(i)}} = g_{|D_1{}^{(i)}} \quad \forall i \leq k$$

Dim:

Proviamo che se $f_{|D_1{}^{(k+1)}} = g_{|D_1{}^{(k+1)}}$ allora $f_{|D_1{}^{(k)}} = g_{|D_1{}^{(k)}}$, dopodiché si conclude con ragionamento induttivo.

Sia quindi$f_{|D_1{}^{(k+1)}} = g_{|D_1{}^{(k+1)}}$ e sia $d^{(k)} \in D^{(k)}$. Consideriamo $d^{(k+1)} \in Succ(d^{(k)})$; si ha che per monotonia:

$$f(d^{(k)}) \sqsubseteq f(d^{(k+1)})$$
$$g(d^{(k)}) \sqsubseteq g(d^{(k+1)})$$

dunque, essendo per ipotesi $f(d^{(k+1)}) = g(d^{(k+1)})$, per le proprietà dei $\mathcal{BT}$*-alberi* si conclude che $f(d^{(k)}) \sqsubseteq g(d^{(k)})$ o viceversa, ma dato che i due elementi sono dello stesso livello deve necessariamente essere:

$$f(d^{(k)}) = g(d^{(k)})$$

□

Proposizione 6.1.4 *Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$-*alberi *e sia $D_1 \stackrel{t}{\to} D_2$ un morfismo in $\mathcal{BT}ep$. Allora:*

$$\mathcal{T}_k(D_1) \cong \mathcal{T}_k(D_2) \quad \forall k \leq h(t)$$

Dim:

Sia $t = \langle i, j \rangle$ e sia $k \leq h(t)$. Ricordando la definizione di $h(t)$ si ha che:

$$(i \circ j)_{|D_2{}^{(k)}} = id_{D_2{}^{(k)}}$$

quindi, per la proposizione precedente:

$$(i \circ j)_{|D_2{}^{(i)}} = id_{D_2{}^{(i)}} \quad \forall i \leq k$$

per cui

$$(i \circ j)_{|\mathcal{T}_k(D_2)} = id_{\mathcal{T}_k(D_2)}$$

Inoltre per definizione di ep-pair $j \circ i = id_{D_1}$ e quindi

$$(j \circ i)_{|\mathcal{T}_k(D_1)} = id_{\mathcal{T}_k(D_1)}$$

Le funzioni i e j sono monotone, dunque tali sono anche le loro composizioni e la restrizione di queste a $\mathcal{T}_k(D_1)$ e $\mathcal{T}_k(D_2)$. Questo, unitamente alle considerazioni iniziali, consente di concludere.

□

Continuiamo quindi con alcuni risultati di equivalenza tra la nozione di ep-pair metrica e quella ordinata. In primo luogo mostriamo che l'immagine di un ep-pair sugli alberi tramite il funtore G_{TM} è un ep-pair metrica.

Proposizione 6.1.5 *Siano D_1 e D_2 due* $\mathcal{BT}$-alberi *e siano $f, g : D_1 \to D_2$ due* $\mathcal{BT}$-funzioni*. Allora:*

$$\delta^*(G_{TM}(f), G_{TM}(g)) = \inf\{2^{-k} : f_{|D_1{}^{(k)}} = g_{|D_1{}^{(k)}}\}$$

Dim:

Se $f_{|D_1{}^{(k)}} = g_{|D_1{}^{(k)}}$ allora $\forall (d^{(i)})_{i \in N} \in G_{TM}(D_1)$ vale

$$\begin{aligned}
&\delta^*(G_{TM}(f)((d^{(i)})_{i\in N}), G_{TM}(g)((d^{(i)})_{i\in N})) = \\
&\quad = \delta^*((f(d^{(i)}))_{i\in N}, (g(d^{(i)}))_{i\in N}) = \\
&\quad = \inf\{2^{-n} : f(d^{(n)}) = g(d^{(n)})\} \leq \\
&\quad \leq 2^{-k}
\end{aligned}$$

e quindi $\delta^*(G_{TM}(f), G_{TM}(g)) \leq 2^{-k}$.

Viceversa, sia $\delta^*(G_{TM}(f), G_{TM}(g)) \leq 2^{-k}$. Sia $d^{(k)} \in {D_1}^{(k)}$ e consideriamo una successione $(d^{(i)})_{i\in N} \in G_{TM}(D_1)$ con k-mo elemento uguale a $d^{(k)}$. Si ha dunque:

$$\delta^*(G_{TM}(f)((d^{(i)})_{i\in N}), G_{TM}(g)((d^{(i)})_{i\in N})) \leq 2^{-k}$$

e pertanto, essendo $G_{TM}(f)((d^{(i)})_{i\in N}) = (f(d^{(i)}))_{i\in N}$ e $G_{TM}(g)((d^{(i)})_{i\in N}) = (g(d^{(i)}))_{i\in N}$, per definizione di δ^*, ne deriva che $f(d^{(k)}) = g(d^{(k)})$.

Data la genericità dell'elemento scelto al livello k si conclude:

$$f_{|D_1{}^{(k)}} = g_{|D_1{}^{(k)}}$$

$\square$

Proposizione 6.1.6 *Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$-alberi e sia $D_1 \xrightarrow{t} D_2$ un morfismo in $\mathcal{BT}ep$, $t = \langle i, j \rangle$. Allora $G_{TM}(t) = \langle G_{TM}(i), G_{TM}(j) \rangle$ è un morfismo in $\mathcal{CUM}ep$ tra $G_{TM}(D_1)$ e $G_{TM}(D_2)$ e $\delta(G_{TM}(t)) = 2^{-h(t)}$.*

Dim:

Iniziamo provando che $G_{TM}(t)$ è un morfismo in $\mathcal{CUM}ep$, provando la validità delle tre condizioni della definizione:

a. $G_{TM}(i)$ è un isometric embedding, per la proposizione 6.1.2

b. $G_{TM}(j)$ è una funzione NDI, dato che j è una $\mathcal{BT}$*-funzione*

c. $G_{TM}(j) \circ G_{TM}(i) = G_{TM}(j \circ i) = G_{TM}(id_{D_1}) = id_{G_{TM}(D_1)}$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
&\delta(G_{TM}(t)) = \\
&\quad = \delta^*(G_{TM}(i) \circ G_{TM}(j), id_{G_{TM}(D_2)}) = \\
&\quad = \delta^*(G_{TM}(i \circ j), G_{TM}(id_{D_2})) = && \text{per la prop. prec.} \\
&\quad = \inf\{2^{-k} : (i \circ j)_{|D_2{}^{(k)}} = id_{D_2{}^{(k)}}\} = \\
&\quad = 2^{-\sup\{k : (i \circ j)_{|D_2^{(k)}} = id_{D_2^{(k)}}\}} = \\
&\quad = 2^{-h(t)}
\end{aligned}$$

$\square$

Mostriamo ora che vale anche il viceversa, cioè che l'immagine tramite F_{MT} di un'ep-pair metrica è un ep-pair sugli alberi.

Proposizione 6.1.7 *Siano M_1 e M_2 due CUM e siano $f, g : M_1 \to M_2$ due funzioni NDI. Allora:*

$$d(f, g) \leq 2^{-k} \quad \text{sse} \quad F_{MT}(f)_{|F_{MT}(M_1)^{(k)}} = F_{MT}(g)_{|F_{MT}(M_1)^{(k)}}$$

Dim:

Sia $d(f, g) \leq 2^{-k}$; allora $\forall B^F(x, k) \in F_{MT}(M_1)^{(k)}$, essendo $d(f(x), g(x)) \leq d(f, g) \leq 2^{-k}$, per definizione di F_{MT} si ha:

$$F_{MT}(f)(B^F(x, k)) = B^F(f(x), k) = B^F(g(x), k) = F_{MT}(g)(B^F(x, k))$$

e quindi effettivamente $F_{MT}(f)_{|F_{MT}(M_1)^{(k)}} = F_{MT}(g)_{|F_{MT}(M_1)^{(k)}}$

Viceversa, sia $F_{MT}(f)_{|F_{MT}(M_1)^{(k)}} = F_{MT}(g)_{|F_{MT}(M_1)^{(k)}}$ e consideriamo $x \in M_1$. Si ha che:

$$B^F(f(x), k) = F_{MT}(f)(B^F(x, k)) = F_{MT}(g)(B^F(x, k)) = B^F(g(x), k)$$

e quindi $d(f(x), g(x)) \leq 2^{-k}$. Poiché questo vale $\forall x \in M_1$ si conclude che $d(f, g) \leq 2^{-k}$

$\square$

Corollario 6.1.1 *Siano M_1 e M_2 due CUM e siano $f, g : M_1 \to M_2$ due funzioni NDI. Allora:*

$$d(f,g) = 2^{-k_0} \quad con \ \ k_0 = \sup\{k : F_{MT}(f)_{|F_{MT}(M_1)^{(k)}} = F_{MT}(g)_{|F_{MT}(M_1)^{(k)}}\}$$

(si conviene che $2^{-\infty} = 0$)

Proposizione 6.1.8 *Siano M_1 e M_2 due CUM e sia $M_1 \xrightarrow{t} M_2$ un morfismo in $\mathcal{CUM}ep$, $t = \langle i, j \rangle$. Allora $F_{MT}(t) = \langle F_{MT}(i), F_{MT}(j) \rangle$ è un morfismo in $\mathcal{BT}ep$ tra $F_{MT}(M_1)$ e $F_{MT}(M_2)$ e $h(F_{MT}(t)) = k_0$ se $\delta(t) = 2^{-k_0}$.*

Dim:

Iniziamo provando che $F_{MT}(t)$ è un morfismo in $\mathcal{BT}ep$, provando la validità delle due condizioni della definizione:

a. $F_{MT}(i)$ è un embedding, per la proposizione 6.1.1

b. $F_{MT}(j) \circ F_{MT}(i) = F_{MT}(j \circ i) = F_{MT}(id_{M_1}) = id_{F_{MT}(M_1)}$

Inoltre:

$$\begin{aligned} & h(F_{MT}(t)) = \\ & \quad = \sup\{k : F_{MT}(i) \circ F_{MT}(j)_{|F_{MT}(M_2)^{(k)}} = id_{F_{MT}(M_2)^{(k)}}\} = \\ & \quad = \sup\{k : F_{MT}(i \circ j)_{|F_{MT}(M_2)^{(k)}} = F_{MT}(id_{M_2})_{|F_{MT}(M_2)^{(k)}}\} \end{aligned}$$

per la proposizione precedente dunque si conclude che $h(F_{MT}(t)) = k_0$, con k_0 tale che $\delta(t) = d(i \circ j, id_{M_2}) = 2^{-k_0}$

□

Osservazione 6.1.1 Le considerazioni fin qui fatte consentono di concludere che è possibile estendere i funtori F_{MT} e G_{TM} alle categorie $\mathcal{CUM}ep$ e $\mathcal{BT}ep$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} & F_{MT} : \mathcal{CUM}ep \to \mathcal{BT}ep \\ & F_{MT}(\langle i, j \rangle) = \langle F_{MT}(i), F_{MT}(j) \rangle \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} & G_{TM} : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{CUM}ep \\ & G_{TM}(\langle i, j \rangle) = \langle G_{TM}(i), G_{TM}(j) \rangle \end{aligned}$$

I funtori così estesi stabiliscono un'equivalenza tra le due categorie.

6.2 Torri Convergenti e Costruzione del Limite Diretto

Nel caso metrico una torre convergente è, intuitivamente, una successione di spazi tali che la qualità con cui uno spazio approssima i successivi è via via crescente. Analogamente nel caso dei $\mathcal{BT}$-*alberi* una torre covergente è una successione di alberi tale che, fissata comunque una altezza k, esiste un indice oltre il quale tutti gli alberi sono isomorfi almeno fino all'altezza k. Formalmente la definizione è la seguente.

Definizione 6.2.1 Una torre $(D_n, t_n)_{n \in N}$ in $\mathcal{BT}ep$ si dice una *torre convergente* se

$$\forall k > 0. \exists n_0 \in N.\ \forall m > n \geq n_0.\ h(t_{nm}) \geq k$$

con $t_{nm} = t_{m-1} \circ \ldots \circ t_n$.

Anche in questo caso si dimostra un *lemma di inizialità* che fornisce un criterio per stabilire l'inizialità di un cono per una torre convergente, e viene utilizzato per concludere che il limite diretto di una torre convergente è un cono iniziale per la torre.

Lemma 6.2.1 *Sia $(D_n, t_n)_{n \in N}$ una torre convergente in $\mathcal{BT}ep$ e sia $(D, (\gamma_n)_{n \in N})$, con $\gamma_n = \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$, un cono per la torre. Allora:*

$$(D, (\gamma_n)_{n \in N}) \text{ \textit{è un cono iniziale}} \quad \text{sse} \quad \lim_{n \to \infty} h(\gamma_n) = +\infty$$

Dim:

$(\Leftarrow)$ Sia

$$\lim_{n \to \infty} h(\gamma_n) = +\infty \tag{1}$$

dunque $\forall k > 0. \exists n_0 \in N.\ \forall n \geq n_0.\ h(\gamma_n) \geq k$, e quindi i sottoalberi finiti di altezza k, $\mathcal{T}_k(D)$ e $\mathcal{T}_k(D_n)$, di D e D_n, sono isomorfi.
Sia ora $(D', ({\gamma'}_n)_{n \in N})$ un cono per $(D_n, t_n)_{n \in N}$; dobbiamo definire un morfismo $D \xrightarrow{t} D'$ tale che $\forall n.\ {\gamma'}_n = t \circ \gamma_n$ e mostrarne l'unicità.

- Definizione di t
  Procediamo per livelli; per ogni $k \in N$ esiste $n_k \in N$ ($n_k \geq n_{k-1}$) tale che

  - per l'ipotesi (1)

    $$h(\gamma_{n_k}) \geq k$$

    ossia

    $$\alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k | D^{(k)}} = id_{D^{(k)}}$$

  - per la convergenza della torre, $\forall m > n \geq n_k$

    $$h(t_{nm}) \geq k$$

    ossia

    $$i_{nm} \circ j_{nm | {D_m}^{(k)}} = id_{{D_m}^{(k)}}$$

  intuitivamente le due proprietà dicono che fino al livello k, per $m > n \geq n_k$ D_n e D_m sono isomorfi tra loro e a D.
  Definiamo dunque il morfismo t per livelli ($i^{(k)}$ e $j^{(k)}$ rappresentano le restrizioni delle componenti di t al livello k):

$$\begin{array}{ll} i^{(k)} : D^{(k)} \to {D'}^{(k)} & j^{(k)} : {D'}^{(k)} \to D^{(k)} \\ i^{(k)} = {\alpha'}_{n_k} \circ \beta_{n_k | D^{(k)}} & j^{(k)} = \alpha_{n_k} \circ {\beta'}_{n_k | {D'}^{(k)}} \end{array}$$

Verifichiamo che $t = \langle i, j\rangle$ è ben definita ed è un'ep-pair.

In primo luogo osserviamo che:

$$\forall k.\ n \geq n_k \qquad \begin{array}{l} i^{(k)} = \alpha'_n \circ \beta_{n|D^{(k)}} \\ j^{(k)} = \alpha_n \circ \beta'_{n|D'^{(k)}} \end{array} \tag{2}$$

infatti, per definizione di cono $\gamma_{n_k} = \gamma_n \circ t_{n_k n}$ e $\gamma'_{n_k} = \gamma'_n \circ t_{n_k n}$; dunque $\beta_{n_k} = j_{n_k n} \circ \beta_n$ e $\alpha'_{n_k} = \alpha'_n \circ i_{n_k n}$. Pertanto $\forall d^{(k)} \in D^{(k)}$ vale:

$$\begin{array}{ll}
i^{(k)}(d^{(k)}) = & \text{per def. di } i^{(k)} \\
\quad = \alpha'_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d^{(k)}) = & \text{per le uguagl. di cui sopra} \\
\quad = \alpha'_n \circ i_{n_k n} \circ j_{n_k n} \circ \beta_n(d^{(k)}) = & \text{poché, per costr. } i_{n_k n} \circ j_{n_k n} = id \text{ sul liv. } k \\
\quad = \alpha'_n \circ \beta_n(d^{(k)}) &
\end{array}$$

Allo stesso modo si prova anche la seconda relazione.

A questo punto notiamo che:

- i è una *$\mathcal{BT}$-funzione*

Infatti ovviamente, per come è definita 'conserva' i livelli. Inoltre è monotona: siano $d^{(k_1)}, d^{(k_2)} \in D$ con $level(d^{(k_1)}) = k_1, level(d^{(k_2)}) = k_2$, e sia $d^{(k_1)} \sqsubseteq d^{(k_2)}$, dunque $k_1 \leq k_2$. Quindi:

$$\begin{array}{ll}
i(d^{(k_1)}) = & \text{per def. di } i \\
\quad = i^{(k_1)}(d^{(k_1)}) = & \text{per def. di } i^{(k_1)} \\
\quad = \alpha'_{n_{k_1}} \circ \beta_{n_{k_1}}(d^{(k_1)}) = & \text{per (2), essendo } n_{k_1} \leq n_{k_2} \\
\quad = \alpha'_{n_{k_2}} \circ \beta_{n_{k_2}}(d^{(k_1)}) \sqsubseteq & \text{per monotonia di } \alpha'_{n_{k_2}} \text{ e } \beta_{n_{k_2}} \\
\quad \sqsubseteq \alpha'_{n_{k_2}} \circ \beta_{n_{k_2}}(d^{(k_2)}) = & \text{per def. di } i^{(k_2)} \\
\quad = i^{(k_2)}(d^{(k_2)}) = & \text{per def. di } i \\
\quad = i(d^{(k_2)}) &
\end{array}$$

- j è una *$\mathcal{BT}$-funzione*

Si dimostra come per i.

- i è iniettiva

Infatti siano $d_1, d_2 \in D$. Se $i(d_1) = i(d_2)$ allora necessariamente $level(d_1) = level(d_2) = k$ e per definizione di i:

$$i^{(k)}(d_1) = i^{(k)}(d_2)$$

ossia

$$\alpha'_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d_1) = \alpha'_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d_2)$$

Per l'iniettività di α'_{n_k} (embedding) ne segue che $\beta_{n_k}(d_1) = \beta_{n_k}(d_2)$ e quindi

$$\alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d_1) = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d_2)$$

ma per costruzione, $\alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k|D^{(k)}} = id_{D^{(k)}}$ per cui si conclude che $d_1 = d_2$

- $j \circ i = id_D$
Infatti per ogni elemento $d^{(k)} \in D^{(k)}$ si ha

$$\begin{aligned}
j \circ i(d^{(k)}) = & \quad && \text{per def. di } i \text{ e } j \\
= \alpha_{n_k} \circ \beta'_{n_k} \circ \alpha'_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d^{(k)}) = & && \beta'_{n_k} \circ \alpha'_{n_k} = id \text{ per def. di ep-pair} \\
= \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d^{(k)}) = & && \text{poiché } \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k|D^{(k)}} = id_{D^{(k)}} \\
= d^{(k)} & &&
\end{aligned}$$

Dunque effettivamente t è un'ep-pair.

- $\forall n \in N.\ \gamma'_n = t \circ \gamma_n$

  - $\alpha'_n = i \circ \alpha_n$
  Sia k un livello fissato e sia $d^{(k)} \in D^{(k)}$. Si ha:

  $$i \circ \alpha_n(d^{(k)}) = i^{(k)} \circ \alpha_n(d^{(k)}) = \alpha'_{n_k} \circ \beta_{n_k} \circ \alpha_n(d^{(k)})$$

  Dunque, se $n_k \le n$, per (2), si ottiene:

  $$\alpha'_n \circ \beta_n \circ \alpha_n(d^{(k)}) = \alpha'_n(d^{(k)})$$

  dato che, per definizione di morfismo, $\beta_n \circ \alpha_n$ è l'identità.
  Se invece $n_k > n$, allora $\alpha_n = \alpha_{n_k} \circ i_{nn_k}$ e quindi si ottiene:

  $$\alpha'_{n_k} \circ \beta_{n_k} \circ \alpha_{n_k} \circ i_{nn_k}(d^{(k)}) =$$

  essendo $\beta_{n_k} \circ \alpha_{n_k}$ l'dentità:

  $$= \alpha'_{n_k} \circ i_{nn_k}(d^{(k)}) = \alpha'_n(d^{(k)})$$

  - $\beta'_n = \beta_n \circ j$
  Analogo al caso precedente.

- Unicità di t
Sia $D \xrightarrow{t'} D'$ un altro morfismo, $t' = \langle i', j' \rangle$, tale che $\forall n.\ \gamma'_n = t' \circ \gamma_n$. Mostriamo che allora $t = t'$.
Si ha che per ogni elemento di livello k in D, $d^{(k)} \in D^{(k)}$

$$\begin{aligned}
i(d^{(k)}) = & \quad && \text{per def. di } i \\
= i^{(k)}(d^{(k)}) = & && \text{per def. di } i^{(k)} \\
= \alpha'_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d^{(k)}) = & && \text{poiché } \gamma'_{n_k} = t' \circ \gamma_{n_k} \\
= i' \circ \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d^{(k)}) = & && \text{poiché } \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k|D^{(k)}} = id_{D^{(k)}} \\
= i'(d^{(k)}) & &&
\end{aligned}$$

Dunque $i = i'$.
Allo stesso modo, per ogni elemento di livello k in D', $d^{(k)} \in D'^{(k)}$

$$
\begin{aligned}
j(d^{(k)}) &= && \text{per def. di } j \\
&= j^{(k)}(d^{(k)}) = && \text{per def. di } j^{(k)} \\
&= \alpha_{n_k} \circ \beta'_{n_k}(d^{(k)}) = && \text{poiché } \gamma'_{n_k} = t' \circ \gamma_{n_k} \\
&= \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k} \circ j'(d^{(k)}) = && \text{poiché } \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k|D^{(k)}} = id_{D^{(k)}} \\
&= j'(d^{(k)})
\end{aligned}
$$

Dunque $j = j'$ e si conclude.

($\Rightarrow$) Sia $(D, (\gamma_n)_{n \in N})$ un cono iniziale per la torre convergente $(D_n, t_n)_{n \in N}$. Si deve provare che $\lim_{n \to \infty} h(\gamma_n) = +\infty$, ovvero che

$$\forall k > 0. \exists n_k \in N. \ \forall n \geq n_k. \ h(\gamma_n) \geq k,$$

Definiamo un nuovo cono $(D', (\gamma'_n)_{n \in N})$ per la torre; si procede per livelli sfruttando la convergenza della torre.
Per ogni $k > 0$, per la convergenza della torre, vi è un indice n_k $(n_k > n_{k-1})$ tale che $\forall m > n \geq n_k$:

$$h(t_{nm}) \geq k$$

ossia intuitivamente per ogni $n \geq n_k$ tutti gli alberi D_n sono isomorfi almeno fino al livello k. Definiamo dunque il livello k di D' come:

$$D'^{(k)} = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(D^{(k)})$$

con l'ordinamento:

$$d'^{(k_1)} \sqsubseteq d'^{(k_2)} \ \ se \ k_1 \leq k_2 \ \ e \ \ \begin{array}{l} d'^{(k_1)} = \alpha_{n_{k_1}} \circ \beta_{n_{k_1}}(d^{(k_1)}) \\ d'^{(k_2)} = \alpha_{n_{k_2}} \circ \beta_{n_{k_2}}(d^{(k_2)}) \end{array} \quad \text{con } d^{(k_1)} \sqsubseteq d^{(k_2)}$$

Ora, $D' \subseteq D$; se proviamo che D' è un cono per la torre in esame, per l'inizialità di D si ha l'esistenza di un morfismo $D \xrightarrow{t} D'$. Ricordando il significato dei morfismi, questo consente di concludere che $D' = D$ e quindi che per ogni k, $\alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}$ limitata al livello k coincide con l'identità, che è quelllo che si vuole.

Iniziamo osservando che D' così definito è effettivamente un $\mathcal{BT}$*-albero*, verificando che valgono le proprietà della definizione:

a. Il minimo $\bot_{D'} = \alpha_{n_0} \circ \beta_{n_0}(\bot_D)$

b. Siano $d'_1, d'_2, d' \in D'$ con $level(d_1) = k_1, level(d_2) = k_2, level(d) = k$ e sia $d'_1 \sqsubseteq d'$ e $d'_2 \sqsubseteq d'$. Supponiamo per fissare le idee che $k_1 \leq k_2 \leq k$.
Si ha allora, per definizione dell'ordine su D':

$$
\begin{aligned}
d'_1 &= \alpha_{n_{k_1}} \circ \beta_{n_{k_1}}(d_1) \\
d'_2 &= \alpha_{n_{k_2}} \circ \beta_{n_{k_2}}(d_2) \\
d' &= \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d)
\end{aligned}
$$

con $d_1 \sqsubseteq d$ e $d_2 \sqsubseteq d$.

Dunque, per definizione di $\mathcal{BT}$*-albero* $d_1 \sqsubseteq d_2$. Inoltre dato che $n_k \geq n_{k_1}$ si ha che:

$$
\begin{aligned}
d'_1 &= \alpha_{n_{k_1}} \circ \beta_{n_{k_1}}(d_1) = \\
&= \alpha_{n_k} \circ i_{n_{k_1} n_k} \circ j_{n_{k_1} n_k} \circ \beta_{n_k}(d_1) = \quad \text{poiché per costr. } i_{n_{k_1} n_k} \circ j_{n_{k_1} n_k} = id \text{ sul liv. } k_1 \\
&= \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d_1)
\end{aligned}
$$

ed allo stesso modo

$$d'_2 = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d_2)$$

Dunque si conclude che, per monotonia di $\alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}$, vale:

$$d'_1 = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d_1) \sqsubseteq \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d_2) = d'_2$$

c. Sia $d'^{(k)} \in D'$ con $\mathit{level}(d'^{(k)}) = k$. Allora è sufficiente osservare che:

$$\downarrow d'^{(k)} \subseteq \cup_{i=0}^{k-1} D'^{(i)} = \cup_{i=0}^{k-1} \alpha_{n_i} \circ \beta_{n_i}(D^{(i)})$$

per concludere che $\downarrow d'^{(k)}$ è finito.

d. Sia $d'^{(k)} = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(d^{(k)}) \in D'$ con $\mathit{level}(d'^{(k)}) = k$. Allora:

$$\mathit{Succ}(d'^{(k)}) \subseteq D'^{(k+1)} = \alpha_{n_{k+1}} \circ \beta_{n_{k+1}}(D^{(k+1)})$$

e quindi $\mathit{Succ}(d'^{(k)})$ è finito.

Inoltre consideriamo $d^{(k+1)} \in \mathit{Succ}(d^{(k)})$. Posto $d'^{(k+1)} = \alpha_{n_{k+1}} \circ \beta_{n_{k+1}}(d^{(k+1)})$ si ha che ovviamente $d'^{(k+1)} \in \mathit{Succ}(d'^{(k)})$, che pertanto è non vuoto.

Consideriamo il cono $(D', (\gamma'_n)_{n \in N})$ per la torre $(D_n, t_n)_{n \in N}$, con $\gamma'_n = \langle \alpha'_n, \beta'_n \rangle$, definito nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\alpha'_n &= \alpha_n \\
\beta'_n &= \beta_{n|D'}
\end{aligned}
$$

Osserviamo che effettivamente per ogni elemento $d^{(k)} \in {D_n}^{(k)}$ $\alpha'_n(d^{(k)}) = \alpha_n(d^{(k)}) \in D'^{(k)}$. Infatti se $n < n_k$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n(d^{(k)}) = \\
&\quad = \alpha_{n_k} \circ i_{n n_k}(d^{(k)}) = \qquad \text{poiché } \beta_{n_k} \circ \alpha_{n_k} = id \\
&\quad = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k} \circ \alpha_{n_k} \circ i_{n n_k}(d^{(k)}) = \\
&\quad = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k} \circ \alpha_n(d^{(k)})
\end{aligned}
$$

Se invece $n \geq n_k$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n(d^{(k)}) = \\
&\quad = \alpha_n \circ \beta_n \circ \alpha_n(d^{(k)}) = \\
&\quad = \alpha_{n_k} \circ i_{n_k n} \circ j_{n_k n} \circ \beta_{n_k} \circ \alpha_n(d^{(k)}) = \quad \text{per la scelta di } n_k \\
&\quad = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k} \circ \alpha_n(d^{(k)})
\end{aligned}
$$

Dunque in entrambi i casi, dato che $\alpha_n(d^{(k)}) \in D^{(k)}$ si conclude.

Ora, per l'inizialità di $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ esiste un unico morfismo $D \xrightarrow{t} D'$ tale che $\forall n.\ \gamma'_n = t \circ \gamma_n$. In particolare, se $t = \langle i, j\rangle$, $i : D \to D'$ è iniettiva, quindi essendo $D' \subseteq D$, si ha che $D' = D$. Si ha quindi:

$$D'^{(k)} = D^{(k)} \qquad \forall k \in N$$

pertanto, ricordando la definizione di $D'^{(k)}$, per ogni indice k:

$$D'^{(k)} = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k}(D^{(k)}) = D^{(k)}$$

Si conclude che $\forall k \in N.\forall n \geq n_k$

$$\begin{aligned}
&\alpha_n \circ \beta_{n|D^{(k)}} = \\
&\quad = \alpha_{n_k} \circ i_{n_k n} \circ j_{n_k n} \circ \beta_{n_k|D^{(k)}} = \quad \text{per la scelta di } n_k \\
&\quad = \alpha_{n_k} \circ \beta_{n_k|D^{(k)}} = \\
&\quad = id_{D^{(k)}}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$h(\gamma_n) \geq k$$

che è quanto si voleva.

$\square$

Costruzione del Limite Diretto

Sia $(D_n, t_n)_{n\in N}$ una torre convergente; fissata comunque un'altezza k, per definizione di convergenza, oltre un certo indice tutti gli alberi della torre sono isomorfi almeno fino al livello k. La costruzione del limite diretto rappresenta la naturale formalizzazione dell'idea intuitiva di albero limite della successione. Gli elementi del limite diretto sono successioni di elementi dei singoli alberi, che, in base alla considerazione precedente, dopo un certo indice si 'stabilizzano' sul valore limite.

Definizione 6.2.2 (Costruzione del Limite Diretto) Sia $(D_n, t_n)_{n\in N}$ una torre convergente in $\mathcal{BT}ep$, con $t_n = \langle i_n, j_n\rangle$. Si dice *limite diretto* di $(D_n, t_n)_{n\in N}$ un cono $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$, con $\gamma_n = \langle \alpha_n, \beta_n\rangle$ definito nel modo seguente:

a. il *$\mathcal{BT}$-albero D* è definito per livelli; per ogni altezza k:

$$D^{(k)} = \{(d_n^{(k)})_{n\in N} : \forall n \in N.\ d_n^{(k)} \in {D_n}^{(k)}\ \ e\ d_n^{(k)} = j_n(d_{n+1}^{(k)})\}$$

con l'ordine definito da:

$$(d_n^{(k_1)})_{n\in N} \sqsubseteq (d_n^{(k_2)})_{n\in N} \qquad se\ k_1 \leq k_2\ \ e\ \ \forall n \in N.\ d_n^{(k_1)} \sqsubseteq d_n^{(k_2)}$$

b. i morfismi γ_n sono definiti:

- $\alpha_n : D_n \to D$
  $\alpha_n(d^{(k)}) = (d_i^{(k)})_{i\in N}$
  con

$$d_i^{(k)} = \begin{cases} j_{in}(d^{(k)}) & se\ i < n \\ d^{(k)} & se\ i = n \\ i_{ni}(d^{(k)}) & se\ i > n \end{cases}$$

- $\beta_n : D \rightarrow D_n$
  $\beta_n((d_i^{(k)})_{i\in N} = d_n^{(k)}$

Dimostriamo quindi che il limite diretto è ben definito, ovvero che D è un $\mathcal{BT}$*-albero* e che $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ è un cono per la torre $(D_n, t_n)_{n\in N}$.

Proposizione 6.2.1 *Sia* $(D_n, t_n)_{n\in N}$ *una torre convergente in* $\mathcal{BT}ep$*, con* $t_n = \langle i_n, j_n\rangle$*, e sia* $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ *il limite diretto della torre* $(D_n, t_n)_{n\in N}$ *(definito come in 6.2.2). Allora* $(D, \sqsubseteq)$ *è un* $\mathcal{BT}$-albero.

Dim:

Iniziamo osservando che $\forall k \in N$ il livello k di D, cioè $D^{(k)}$, è *finito*. Infatti sia k fissato; per la convergenza della torre $\exists n_k \in N.\ \forall m > n \geq n_k.\ h(t_{nm}) \geq k$. In particolare $h(t_n) \geq k$, per cui, ricordando la definizione di $h(t)$, si ha che:

$$i_n \circ j_{n|D_{n+1}{}^{(k)}} = id_{D_{n+1}{}^{(k)}} \qquad \forall n \geq n_k \qquad (*)$$

quindi per $n \geq n_k$. $\forall d_n^{(k)} \in D^{(k)}$. $\exists! d_{n+1}^{(k)} \in D_{n+1}{}^{(k)}$ tale che $d_n^{(k)} = j_n(d_{n+1}^{(k)})$. Un tale elemento esiste per la suriettività di j_n ed è unico in quanto se $j_n(d_{n+1}^{(k)}) = j_n({d'}_{n+1}^{(k)})$ allora $i_n \circ j_n(d_{n+1}^{(k)}) = i_n \circ j_n({d'}_{n+1}^{(k)})$ e quindi per $(*)$ si conclude che $d_{n+1}^{(k)} = {d'}_{n+1}^{(k)}$. Dunque $D^{(k)}$ ha cardinalità non superiore a quella di $D_{n_k}{}^{(k)}$, e quindi è finito.

Proviamo quindi che D è un $\mathcal{BT}$*-albero* verificando che valgono le proprietà della definizione:

a. Il minimo $\bot_D = (\bot_{D_n})_{n\in N}$

b. Siano $(d_n^{(k_1)})_{n\in N}, (d_n^{(k_2)})_{n\in N}, (d_n^{(k)})_{n\in N} \in D$ elementi di livello k_1, k_2 e k rispettivamente, con $(d_n^{(k_1)})_{n\in N} \sqsubseteq (d_n^{(k)})_{n\in N}$ e $(d_n^{(k_2)})_{n\in N} \sqsubseteq (d_n^{(k)})_{n\in N}$. Supponiamo per fissare le idee che $k_1 \leq k_2 \leq k$.
   Si ha allora, per definizione dell'ordine su D che $\forall n \in N$:

   $$\begin{matrix} d_n^{(k_1)} \sqsubseteq d_n^{(k)} \\ d_n^{(k_2)} \sqsubseteq d_n^{(k)} \end{matrix} \qquad \text{quindi} \qquad d_n^{(k_1)} \sqsubseteq d_n^{(k_2)}$$

   pertanto $(d_n^{(k_1)})_{n\in N} \sqsubseteq (d_n^{(k_2)})_{n\in N}$.

c. Sia $(d_n^{(k)})_{n\in N} \in D$ con *level*$((d_n^{(k)})_{n\in N}) = k$. Allora è sufficiente osservare che:

   $$\downarrow (d_n^{(k)})_{n\in N} \subseteq \cup_{i=0}^{k-1} D^{(i)}$$

   e per l'osservazione iniziale si conclude che $\downarrow (d_n^{(k)})_{n\in N}$ è finito.

d. Sia $(d_n^{(k)})_{n\in N} \in D$ con *level*$((d_n^{(k)})_{n\in N}) = k$. Allora:

$$Succ((d_n^{(k)})_{n\in N}) \subseteq D^{(k+1)}$$

e quindi $Succ((d_n^{(k)})_{n\in N})$ è finito.

Inoltre $\forall n \in N$, per definizione di $\mathcal{BT}$*-albero*, vi è $d_n^{(k+1)} \in Succ(d_n^{(k)})$; chiaramente $(d_n^{(k+1)})_{n\in N} \in Succ((d_n^{(k)})_{n\in N})$, che pertanto è non vuoto.

□

Proposizione 6.2.2 *Sia* $(D_n, t_n)_{n\in N}$ *una torre convergente in* $\mathcal{BT}ep$*, con* $t_n = \langle i_n, j_n\rangle$*. Allora il limite diretto* $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ *della torre (definito come in 6.2.2) è un cono per la torre stessa.*

Dim:

Iniziamo verificando che $\forall n \in N.\ \gamma_n = \langle \alpha_n, \beta_n\rangle$ è un'ep-pair, ovvero che α_n è una $\mathcal{BT}$*-funzione* iniettiva, β_n è una $\mathcal{BT}$*-funzione* e $\beta_n \circ \alpha_n = id_{D_n}$:

- α_n è una $\mathcal{BT}$*-funzione* iniettiva

Chiaramente α_n 'conserva' i livelli. Inoltre è monotona; infatti, siano $d^{(k_1)}, d^{(k_2)} \in D_n$ con $d^{(k_1)} \sqsubseteq d^{(k_2)}$ (quindi $k_1 \leq k_2$).Per definizione:

$$\alpha_n(d^{(k_1)}) = (d_i^{(k_1)})_{i\in N}$$
$$\alpha_n(d^{(k_2)}) = (d_i^{(k_2)})_{i\in N}$$

e quindi per ogni indice i:

- se $i < n$ allora, per la monotonia di j_{in} si ha $d_i^{(k_1)} = j_{in}(d^{(k_1)}) \sqsubseteq j_{in}(d^{(k_2)}) = d_i^{(k_2)}$
- se $i = n$ allora, $d_i^{(k_1)} = d^{(k_1)} \sqsubseteq d^{(k_2)} = d_i^{(k_2)}$
- se $i > n$ allora, per la monotonia di i_{ni} si ha $d_i^{(k_1)} = i_{ni}(d^{(k_1)}) \sqsubseteq i_{ni}(d^{(k_2)}) = d_i^{(k_2)}$

per cui $(d_i^{(k_1)})_{i\in N} \sqsubseteq (d_i^{(k_2)})_{i\in N}$.

Dunque α_n è una $\mathcal{BT}$*-funzione*. Inoltre è iniettiva, dato che $\alpha_n(d^{(k)}) = (d_i^{(k)})_{i\in N}$ con $d_n^{(k)} = d^{(k)}$.

- β_n è una $\mathcal{BT}$*-funzione*

Chiaramente β_n 'conserva' i livelli. Inoltre è monotona: siano $(d_i^{(k_1)})_{i\in N}, (d_i^{(k_2)})_{i\in N} \in D$ con $(d_i^{(k_1)})_{i\in N} \sqsubseteq (d_i^{(k_2)})_{i\in N}$. Allora per definizione dell'ordine in D vale in particolare $d_n^{(k_1)} \sqsubseteq d_n^{(k_2)}$, ossia $\beta_n((d_i^{(k_1)})_{i\in N}) \sqsubseteq \beta_n((d_i^{(k_2)})_{i\in N})$.

- $\beta_n \circ \alpha_n = id_{D_n}$

Ovvio

Per concludere che $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ è un cono per la torre, occorre dimostrare che:

$$\forall n \in N.\ \gamma_n = \gamma_{n+1} \circ t_n$$

ovvero che $\forall n \in N.\ \alpha_n = \alpha_{n+1} \circ i_n$ e $\beta_n = j_n \circ \beta_{n+1}$:

- $\alpha_n = \alpha_{n+1} \circ i_n$

Si ha che $\forall d^{(k)} \in D_n$

$$\alpha_{n+1} \circ i_n(d^{(k)}) = \alpha_{n+1}(i_n(d^{(k)})) = (d_i^{(k)})_{i\in N}$$

con

$$d_i^{(k)} = \begin{cases} j_{i(n+1)}(i_n(d^{(k)})) = j_{in}(d^{(k)}) & \text{se } i < n+1 \\ i_n(d^{(k)}) & \text{se } i = n+1 \\ i_{(n+1)i}(i_n(d^{(k)})) = i_{ni}(d^{(k)}) & \text{se } i > n+1 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} j_{in}(d^{(k)}) & \text{se } i < n \\ d^{(k)} & \text{se } i = n \\ i_n(d^{(k)}) & \text{se } i > n \end{cases}$$

e quindi $\alpha_{n+1} \circ i_n(d^{(k)}) = \alpha_n(d^{(k)})$.
- $\beta_n = j_n \circ \beta_{n+1}$
Si ha che $\forall (d_i^{(k)})_{i\in N} \in D$ vale

$$\begin{aligned} & j_n \circ \beta_{n+1}((d_i^{(k)})_{i\in N}) = \\ & \quad = j_n(\beta_{n+1}(((d_i^{(k)})_{i\in N})) = \\ & \quad = j_n(d_{n+1}^{(k)}) = \\ & \quad = d_n^{(k)} = \\ & \quad = \beta_n((d_i^{(k)})_{i\in N}) \end{aligned}$$

□

A questo punto utilizzando il Lemma di Inizialità si conclude immediatamente l'inizialità del limite diretto, cioè:

Proposizione 6.2.3 *Il limite diretto di una torre convergente è un cono iniziale per tale torre.*

Dim:

Sia $(D_n, t_n)_{n\in N}$ una torre convergente e sia $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ il limite diretto di tale torre. È noto che $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ è un cono per la torre; per dimostrare che è iniziale, utilizziamo il Lemma di Inizialità e proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} h(\gamma_n) = +\infty$$

ossia che $\forall k.\ \exists n_k.\forall n \geq n_k.h(\gamma_n) = \sup\{i : \alpha_n \circ \beta_{n|D^{(i)}} = id_{D^{(i)}}\} \geq k$.
Ora, per la convergenza della torre, per ogni k vi è n_k tale che $\forall m > n \geq n_k.\ h(t_{nm}) \geq k$. Dunque per $n \geq n_k$:

$$\alpha_n \circ \beta_n((d_i^{(k)})_{i\in N}) = \alpha_n(d_n^{(k)}) = (e_i^{(k)})_{i\in N}$$

con

$$e_i^{(k)} = \begin{cases} j_{in}(d_n^{(k)}) & \text{se } i < n \\ d_n^{(k)} & \text{se } i = n \\ i_{ni}(d_n^{(k)}) & \text{se } i > n \end{cases}$$

Nei primi due casi ($i \leq n$), ovviamente, $e_i^{(k)} = d_i^{(k)}$. Se invece $i > n$ allora è sufficiente ricordare che, essendo $i > n \geq n_k$ vale $i_{ni} \circ j_{ni|D_n{}^{(k)}} = id_{D_n{}^{(k)}}$ e quindi si ottiene:

$$e_i^{(k)} = i_{ni}(d_n^{(k)}) = i_{ni}(j_{ni}(d_i^{(k)})) = d_i^{(k)}$$

Quindi $\alpha_n \circ \beta_n((d_i^{(k)})_{i\in N}) = (d_i^{(k)})_{i\in N}$, dunque $\alpha_n \circ \beta_{n|D^{(k)}} = id_{D^{(k)}}$, per cui, come si voleva, $h(\gamma_n) \geq k$.

□

Concludiamo questa sezione con un risultato che mostra che effettivamente il limite diretto rappresenta la formalizzazione dell'idea intuitiva di albero limite della torre. Data una torre convergente, per ogni livello k fissato, vi è un indice oltre il quale tutti gli alberi sono isomorfi fino al livello k. Vedremo che oltre questo indice gli alberi sono isomorfi fino al livello k anche con il limite diretto della successione.

Proposizione 6.2.4 *Sia $(D_n, t_n)_{n\in N}$ una torre convergente e sia $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ il limite diretto di tale torre. Allora:*

$$\forall k \in N.\ \exists n_k \in N.\ \forall n \geq n_k.\ \mathcal{T}_k(D_n) \cong \mathcal{T}_k(D)$$

Dim:

Abbiamo già osservato, nella dimostrazione della proposizione precedente, che , per il limite diretto di una torre convergente, vale $\lim_{n\to\infty} h(\gamma_n) = +\infty$.
Dunque, $\forall k.\ \exists n_k.\ \forall n \geq n_k.\ h(\gamma_n) \geq k$, con:

$$D_n \overset{\gamma_n}{\to} D$$

quindi per la proposizione 6.1.4 vale

$$\mathcal{T}_k(D_n) \cong \mathcal{T}_k(D)$$

□

6.3 Un Teorema di Punto Fisso

Nel caso metrico un funtore contraente $F : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ ha un punto fisso, ovvero esiste uno spazio metrico completo M tale che $M \cong FM$. Per garantire l'unicità di tale punto fisso (a meno di isomorfismi) all'ipotesi di contraenza si aggiunge anche quella Hom-contraenza.
In questa sezione proveremo un risultato simile anche nella categoria $\mathcal{BT}ep$. È interessante notare che la restrizione ai $\mathcal{BT}$*-alberi*, che in ambito metrico corriponde alla restrizione ai CUM, consente di avere l'unicità del punto fisso con la sola ipotesi che il funtore sia contraente.

Iniziamo introducendo la nozione di funtore contraente in $\mathcal{BT}ep$. Come nel caso metrico, un funtore H è contraente se mappa ogni embedding in un embedding 'migliore', ovvero se dato un morfismo $D_1 \overset{t}{\to} D_2$ (dunque D_1 isomorfo a D_2 fino al livello $h(t)$) si ha che HD_1 approssima HD_2 meglio di quanto D_1 approssimava D_2, cioè HD_1 e HD_2 sono isomorfi fino ad un livello maggiore di $h(t)$. Formalmente:

Definizione 6.3.1 Un funtore $H : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{BT}ep$ si dice *k-contraente* se $\exists k > 0$ tale che per ogni morfismo $D_1 \overset{t}{\to} D_2$ vale

$$h(Ht) \geq h(t) + k$$

Continuiamo con un risultato che mostra l'equivalenza tra la nozione di funtore contraente sugli alberi e la corrispondente nozione metrica.

Proposizione 6.3.1 *Sia* $H_\tau : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{BT}ep$ *un funtore* k*-contraente. Allora* $H_M : \mathcal{CUM}ep \to \mathcal{CUM}ep$ *definito da* $H_M = G_{TM} \circ H_\tau \circ F_{MT}$ *è un funtore* 2^{-k}*-contraente.*

Dim:

Siano M_1 e M_2 due CUM e sia $t_M = \langle i_M, j_M \rangle$ un morfismo $M_1 \xrightarrow{t_M} M_2$. Allora:

$$
\begin{aligned}
&\delta(H_M(t_M)) = \\
&\quad = \delta(G_{TM} \circ H_\tau \circ F_{MT}(t_M)) = \\
&\quad = \delta(G_{TM}(H_\tau(F_{MT}(t_M)))) = && \text{per la prop. 6.1.6} \\
&\quad = 2^{-h(H_\tau(F_{MT}(t_M)))} \leq && \text{per la contraenza di } H_\tau \\
&\quad \leq 2^{-(k+h(F_{MT}(t_M)))} = \\
&\quad = 2^{-k} 2^{-h(F_{MT}(t_M))} = && \text{per la prop. 6.1.8} \\
&\quad = 2^{-k}\delta(t_M)
\end{aligned}
$$

e quindi H_M è 2^{-k}-contraente.

□

Vale anche il risultato duale:

Proposizione 6.3.2 *Sia* $H_M : \mathcal{CUM}ep \to \mathcal{CUM}ep$ *un funtore* 2^{-k}*-contraente. Allora* $H_\tau : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{BT}ep$ *definito da* $H_\tau = F_{MT} \circ H_M \circ G_{TM}$ *è un funtore* k*-contraente.*

Dim:

Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$*-alberi* e sia $t_\tau = \langle i_\tau, j_\tau \rangle$ un morfismo $D_1 \xrightarrow{t_\tau} D_2$. Allora:

$$
\begin{aligned}
&h(H_\tau(t_\tau)) = \\
&\quad = h(F_{MT} \circ H_M \circ G_{TM}(t_\tau)) = \\
&\quad = h(F_{MT}(H_M(G_{TM}(t_M)))) = && \text{per la prop. 6.1.8} \\
&\quad = -\log_2(\delta(H_M(G_{TM}(t_\tau)))) \leq && \text{per la contraenza di } H_M \\
&\quad \geq -\log_2(2^{-k}\delta(G_{TM}(t_\tau))) = \\
&\quad = k - \log_2(\delta(G_{TM}(t_\tau))) = && \text{per la prop. 6.1.6} \\
&\quad = k + h(t_\tau)
\end{aligned}
$$

e quindi H_τ è k-contraente.

□

Come nel caso metrico, per dimostrare il teorema di punto fisso utilizzeremo il teorema di punto fisso categoriale (3.3.1). I risultati che seguono sono finalizzati a provare la validità delle ipotesi di tale teorema in $\mathcal{BT}ep$.
In primo luogo, utilizzando il Lemma di Inizialità, osserviamo che un funtore contraente conserva le torri convergenti ed i loro limiti.

Proposizione 6.3.3 *Sia* $H : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{BT}ep$ *un funtore contraente, sia* $(D_n, t_n)_{n\in N}$ *una torre convergente e sia* $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$ *un suo cono iniziale. Allora* $(HD_n, Ht_n)_{n\in N}$ *è ancora una torre convergente e* $(HD, (H\gamma_n)_{n\in N})$ *è un suo cono iniziale.*

Dim:

Sia $\forall n \in N.\ t_n = \langle i_n, j_n \rangle$ e $\gamma_n = \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$. Iniziamo osservando che $(HD_n, Ht_n)_{n\in N}$ è una torre convergente. Infatti è chiaramente una torre dato che $\forall n \in N.\ HD_n \stackrel{Ht_n}{\to} HD_{n+1}$ ed è convergente dato che, per la convergenza di $(D_n, t_n)_{n\in N}$, fissato comunque k vi è n_k tale che $\forall m > n \geq n_k$

$$h(t_{nm}) \geq k$$

e quindi, essendo H contraente:

$$h(Ht_{nm}) > h(t_{nm}) \geq k$$

Inoltre $(HD, (H\gamma_n)_{n\in N})$ è un cono per la torre $(HD_n, Ht_n)_{n\in N}$, infatti $\forall n.\ \gamma_n = \gamma_{n+1} \circ t_n$ e quindi

$$H\gamma_n = H(\gamma_{n+1} \circ t_n) = H\gamma_{n+1} \circ Ht_n$$

Inoltre per l'inizialità di $(D, (\gamma_n)_{n\in N})$, utilizzando il Lemma di Inizialità si ha che

$$\lim_{n\to\infty} h(\gamma_n) = +\infty$$

e per ogni n, per la contraenza di H, $h(H\gamma_n) > h(\gamma_n)$, per cui

$$\lim_{n\to\infty} h(H\gamma_n) = +\infty$$

e quindi, sempre per il Lemma di Inizialità si conclude.

□

Continuiamo quindi osservando che dato comunque un endofuntore in $\mathcal{BT}ep$ esiste sempre un'immersione iniziale e vediamo come, partendo da tale immersione è possile associare al funtore una torre convergente. Proprio il limite diretto di tale torre sarà il punto fisso cercato.

Osservazione 6.3.1 Sia $(D_\mathcal{I}, \sqsubseteq_{D_\mathcal{I}})$ un $\mathcal{BT}$*-albero* privo di ramificazioni, cioè l'albero costituito da un'unica catena infinita : $D_\mathcal{I} = \{d_0^{(i)} : i \in N\}$ con $\sqsubseteq_{D_\mathcal{I}} = \{(d_0^{(i)}, d_0^{(i+1)}) : i \in N\}^*$ [1].
Dato comunque un $\mathcal{BT}$*-albero* D, esiste sempre un morfismo:

$$D_\mathcal{I} \stackrel{t_0}{\to} D \qquad t_0 = \langle i_0, j_0 \rangle$$

che può esere definito:

- $i_0(d_0^{(i)}) = d^{(i)}$ con $d^{(i)} \in D^{(i)}$ qualsiasi
- $j_0(d^{(i)}) = d_0^{(i)}$ per ogni elemento $d^{(i)} \in D^{(i)}$

Si noti che j_0 è l'unica funzione di D in $D_\mathcal{I}$ (infatti $D_\mathcal{I}$ è l'oggetto terminale di $\mathcal{BT}$) mentre per i_0 la scelta non è in generale unica.

Osserviamo ancora che, in particolare, per ogni funtore $H : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{BT}ep$, esiste sempre un morfismo:

$$D_\mathcal{I} \stackrel{t_0}{\to} HD_\mathcal{I} \qquad t_0 = \langle i_0, j_0 \rangle$$

[1] $*$ indica la chiusura transitiva della relazione

Proposizione 6.3.4 *Sia $H : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{BT}ep$ un funtore contraente e sia D_0 un $\mathcal{BT}$-*albero *tale che esiste un'immersione iniziale, ovvero un morfismo (ep-pair) $D_0 \stackrel{t_0}{\to} HD_0$. Allora $(H^nD_0, H^nt_0)_{n\in N}$, con H^n definito induttivamente:*

$$H^0 = id_{\mathcal{BT}_{ep}}$$
$$H^{n+1} = H \circ H^n \quad \forall n \in N$$

è una torre convergente.

Dim:

$\forall n \in N$ indichiamo con $D_n = H^nD_0$ e $t_n = H^nt_0$. Iniziamo osservando che $(H^nD_0, H^nt_0)_{n\in N}$ è chiaramente una torre dato che $\forall n \in N.\ H^nD_0 \stackrel{H^nt_0}{\to} H^{n+1}D_0$.
Tale torre è convergente; infatti

$$\forall m > n.\ h(t_{nm}) \geq n$$

dimostriamolo per induzione su n:

$(n = 0)$ Ovvio.

$(n \to n + 1)$ Sia $h(t_{nm}) \geq n$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
&h(t_{(n+1)m'}) = \\
&\quad = h(t_{m'-1} \circ \ldots \circ t_{n+1}) = \\
&\quad = h(Ht_{m'-2} \circ \ldots \circ Ht_n) = \\
&\quad = h(H(t_{m'-2} \circ \ldots \circ t_n)) = \\
&\quad = h(Ht_{n(m'-1)}) > && \text{poiché } H \text{ è contraente} \\
&\quad > h(t_{n(m'-1)}) && \text{per ip. ind.} \\
&\quad \geq n
\end{aligned}$$

quindi si conclude che $h(t_{(n+1)m'}) \geq n + 1$.

Dunque la torre $(D_n, t_n)_{n\in N} = (H^nD_0, (H^nt_0)_{n\in N})$ è convergente.

□

Prima di dare il teorema di punto fisso è necessario introdurre un ultimo risultato che mostra che due $\mathcal{BT}$*-alberi* isomorfi ad ogni livello finito k sono isomorfi.

Proposizione 6.3.5 *Siano D_1 e D_2 due $\mathcal{BT}$-*alberi. *Se $\forall k \in N.\ \mathcal{T}_k(D_1) \cong \mathcal{T}_k(D_2)$ allora $D_1 \cong D_2$.*

Dim:

Sia $\forall k \in N.\ \mathcal{T}_k(D_1) \cong \mathcal{T}_k(D_2)$, e sia $i_k : \mathcal{T}_k(D_1) \to \mathcal{T}_k(D_2)$ un isomorfismo. Osserviamo che chiaramente per ogni $h \in N$, $i_{k+h|\mathcal{T}_k(D_1)}$ è un isomorfismo tra $\mathcal{T}_k(D_1)$ e $\mathcal{T}_k(D_2)$, quindi non è limitativo supporre che $\forall k \in N.\ i_k \subseteq i_{k+1}$ (cioè $i_{k+h|\mathcal{T}_k(D_1)} = i_k$ per ogni k, h). Dunque, posto:

$$i = \cup_{k=0}^{\infty} i_k$$

si ha che $i : D_1 \to D_2$ è un isomorfismo. Infatti ovviamente 'conserva' i livelli. Inoltre è monotona: se $d^{(k_1)} \sqsubseteq d^{(k_2)} \in D_1$ con $level(d^{(k_1)}) = k_1$ e $level(d^{(k_2)}) = k_2$, allora:

$$
\begin{aligned}
& i(d^{(k_1)}) = \\
& \quad = i_{k_1}(d^{(k_1)}) = \quad \text{poiché } i_{k_1} \subseteq i_{k_2} \\
& \quad = i_{k_2}(d^{(k_1)}) \sqsubseteq \quad \text{per monotonia di } i_{k_2} \\
& \quad \sqsubseteq i_{k_2}(d^{(k_2)}) = \\
& \quad = i(d^{(k_2)})
\end{aligned}
$$

Infine i è invertibile e la sua inversa è $i^{-1} = \cup_{i=0}^{\infty} i_k^{-1}$. La funzione i^{-1} 'conserva' i livelli ed è monotona in quanto tali sono le i_k^{-1}.

□

Siamo quindi in grado di provare il teorema di esistenza ed unicità del punto fisso per funtori contraenti.

Teorema 6.3.1 (Esistenza ed Unicità del Punto Fisso) *Sia $H : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{BT}ep$ un funtore contraente. Allora H ha un unico punto fisso, a meno di isomorfismi, ovvero esiste un $\mathcal{BT}$-*albero *D tale che:*

a. $D \cong HD$

b. $\forall D' \in \mathcal{BT}ep.\ HD' \cong D' \Rightarrow D \cong D'$

Dim:

a. Esistenza

Utilizzando il teorema di punto fisso categoriale (3.3.1), si conclude l'esistenza del punto fisso, che, come nel caso metrico, è il limite diretto della torre convergente che si ottiene applicando il funtore ad un'immersione iniziale.

Formalmente, sia $D_{\mathcal{I}}$ un $\mathcal{BT}$-*albero* privo di ramificazioni. Allora, per l'osservazione 6.3.1 vi è un morfismo $D_{\mathcal{I}} \stackrel{t_0}{\to} HD_{\mathcal{I}}$. Quindi, essendo H contraente, per la proposizone 6.3.4 si ha che $(H^n D_{\mathcal{I}}, H^n t_0)_{n \in N}$ è una torre convergente. Detto $(D, (\gamma_n)_{n \in N})$ il limite diretto di tale torre, per la proposizione 6.2.3 questo è un cono iniziale per la torre.
Ora per la proposizione 6.3.3 H conserva la torre ed il suo cono, cioè $(HH^n D_{\mathcal{I}}, HH^n t_0)_{n \in N} = (H^{n+1} D_{\mathcal{I}}, H^{n+1} t_0)_{n \in N}$ è una torre convergente e $(HD, (H\gamma_n)_{n \in N})$ è un cono iniziale per essa.
Utilizzando il teorema di punto fisso categoriale (3.3.1), quindi, si conclude che D è punto fisso di H, ovvero che $HD \cong D$.

b. Unicità

Per provare l'unicità si osserva che l'albero iniziale $D_{\mathcal{I}}$ della torre di cui il punto fisso D è limite si immerge in qualsiasi altro albero. Dunque, dato un secondo punto fisso D', si ha che $D_{\mathcal{I}}$ si immerge in D'. Ora, visto che ogni elemento della torre si ottiene applicando il funtore contraente H all'elemento precedente e D' è invariante per l'applicazione del funtore, si ha che gli elementi della torre 'approssimano' sempre meglio D'. Si conclude perciò che D' è anch'esso limite della torre e quindi è isomorfo a D.

Formalmente, sia D il punto fisso di H definito come in a e sia D' un altro punto fisso di H, cioè:

$D' \cong HD'$

Sia $HD' \overset{\lambda}{\to} D'$ un isomorfismo (categoriale, quindi una coppia di isomorfismi) e sia $D_{\mathcal{I}} \overset{u_0}{\to} D'$ un morfismo (che esiste per l'osservazione 6.3.1).

Definiamo per ogni $n \in N$ un morfismo $u_n : H^n D_{\mathcal{I}} \to D'$ ponendo:

$u_{n+1} = \lambda \circ Hu_n$

Osserviamo allora che $\forall n \in N$ vale:

$h(u_n) \geq n$

procediamo per induzione su n:

$(n = 0)$ Ovvio.

$(n \to n+1)$ Sia $h(u_n) \geq n$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
&h(u_{n+1}) = \\
&\quad = h(\lambda \circ Hu_n) = && \text{se } \lambda = \langle i_\lambda, j_\lambda \rangle \text{ e } Hu_n = \langle i_n, j_n \rangle \\
&\quad = \sup\{k : i_\lambda \circ i_n \circ j_n \circ j_\lambda = id_{(H^{n+1}D_{\mathcal{I}})^{(k)}}\} && \text{poiché } i_\lambda \circ j_\lambda = id \\
&\quad = \sup\{k : i_n \circ j_n = id_{(H^n D_{\mathcal{I}})^{(k)}}\} = \\
&\quad = h(Hu_n) > && \text{poiché } H \text{ è contraente} \\
&\quad > h(u_n) \geq && \text{per ip. ind.} \\
&\quad \geq n
\end{aligned}$$

quindi si conclude che $h(u_{n+1}) \geq n+1$.

Pertanto, per l'esistenza del morfismo $H^k D_{\mathcal{I}} \overset{u_k}{\to} D'$, usando la proposizione 6.1.4 si ha che $\forall n \geq k \in N$

$\mathcal{T}_k(H^n D_{\mathcal{I}}) \cong \mathcal{T}_k(D')$

Inoltre per la proposizione 6.2.4, essendo D il limite diretto della torre convergente $(H^n D_{\mathcal{I}}, H^n t_0)_{n \in N}$, fissato comunque k, vi è n_k tale che $\forall n \geq n_k$

$\mathcal{T}_k(H^n D_{\mathcal{I}}) \cong \mathcal{T}_k(D)$

e quindi $\forall k$

$\mathcal{T}_k(D) \cong \mathcal{T}_k(D')$

Dato che per ogni livello finito i $\mathcal{BT}$*-alberi* D e D' sono isomorfi, per la proposizione 6.3.5 si conclude che $D' \cong D$, che è quanto si voleva.

□

6.4 Una Classe di Equazioni con un'Unica Soluzione in $\mathcal{BT}ep$

In questa sezione vogliamo provare che molte equazioni di dominio che coinvolgono i costruttori di dominio usuali (lift, prodotto, somma, spazio delle funzioni e powerdomain) hanno un'unica soluzione in $\mathcal{BT}ep$. In primo luogo introdurremo una classe di funtori in $\mathcal{BT}ep$, per i quali si può dare una semplice condizione che ne implica la contraenza. È chiaro, quindi, che ogni equazione di dominio in $\mathcal{BT}ep$ indotta da un funtore del tipo suddetto, che soddisfi la condizione, avrà un'unica soluzione.

6.4.1 Estensione dei Costruttori ai Morfismi

Il primo passo consiste nell'estensione dei costruttori già introdotti sui $\mathcal{BT}$*-alberi* ai morfismi della categoria $\mathcal{BT}ep$, ovvero alle ep-pair.

Lift

Definizione 6.4.1 Siano D e E due $\mathcal{BT}$*-alberi* e sia $f : D \to E$ una $\mathcal{BT}$*-funzione*. Definiamo la funzione $f_\perp : D_\perp \to E_\perp$ nel modo seguente

$$f_\perp(\perp) = \perp$$
$$f_\perp(d) = f(d) \quad \forall d \in D$$

Proposizione 6.4.1 *Siano D e E due* $\mathcal{BT}$-alberi *e sia $f : D \to E$ una* $\mathcal{BT}$-funzione. *Allora la funzione $f_\perp : D_\perp \to E_\perp$ è una* $\mathcal{BT}$-funzione.
Inoltre se f è iniettiva allora anche $f_\perp$ è iniettiva.

Dim:

Ovvio.

□

Possiamo quindi definire il lift anche sulle ep-pair:

Definizione 6.4.2 Siano D e E due $\mathcal{BT}$*-alberi* e sia $D \xrightarrow{t} E$ un morfismo, con $t = \langle i, j \rangle$. Definiamo $t_\perp = \langle i_\perp, j_\perp \rangle : D_\perp \to E_\perp$.

Proposizione 6.4.2 *Siano D e E due* $\mathcal{BT}$-alberi *e sia $D \xrightarrow{t} E$ un morfismo, con $t = \langle i, j \rangle$. Allora $t_\perp : D_\perp \to E_\perp$ è un morfismo.*

Dim:

Sia $t_\perp = \langle i', j' \rangle$; allora, per la proposizione precedente $i' = i_\perp$ è una $\mathcal{BT}$*-funzione* iniettiva (in quanto i è una $\mathcal{BT}$*-funzione* iniettiva), j è una $\mathcal{BT}$*-funzione* (in quanto j è una $\mathcal{BT}$*-funzione*). Resta da provare che $j_\perp \circ i_\perp = id_{D_\perp}$, ma questo discende immediatamente dal fatto che $j \circ i = id_D$

□

Prodotto

Definizione 6.4.3 Siano D_1, D_2, E_1, E_2 *$\mathcal{BT}$-alberi* e siano $f_1 : D_1 \to E_1$ e $f_2 : D_2 \to E_2$ due *$\mathcal{BT}$-funzioni*. Definiamo la funzione $f_1 \otimes f_2 : D_1 \otimes D_2 \to E_1 \otimes E_2$ nel modo seguente

$$(f_1 \otimes f_2)(d_1, d_2) = (f_1(d_1), f_2(d_2)) \quad \forall (d_1, d_2) \in D_1 \otimes D_2$$

Proposizione 6.4.3 *Siano* D_1, D_2, E_1, E_2 $\mathcal{BT}$-alberi *e siano* $f_1 : D_1 \to E_1$ *e* $f_2 : D_2 \to E_2$ *due* $\mathcal{BT}$-funzioni*. Allora la funzione* $f_1 \otimes f_2 : D_1 \otimes D_2 \to E_1 \otimes E_2$ *è una* $\mathcal{BT}$-funzione*.*
Inoltre se f_1 *e* f_2 *sono iniettive allora anche* $f_1 \otimes f_2$ *è iniettiva.*

Dim:

Iniziamo osservando che $f_1 \otimes f_2$ è una *$\mathcal{BT}$-funzione*. Infatti chiaramente 'conserva' i livelli ed è monotona: siano $x = (d_1, d_2), x' = (d_1', d_2') \in D_1 \otimes D_2$ con $x \sqsubseteq x'$; allora per definizione di $\sqsubseteq_\otimes$, si ha $d_1 \sqsubseteq d_1'$ e $d_2 \sqsubseteq d_2'$, quindi per monotonia delle f_i vale $f_1(d_1) \sqsubseteq f_1(d_1')$ e $f_2(d_2) \sqsubseteq f_2(d_2')$, per cui $(f_1 \otimes f_2)(d_1, d_2) \sqsubseteq (f_1 \otimes f_2)(d_1', d_2')$.

Inoltre siano f_1 e f_2 iniettive. Se $(f_1 \otimes f_2)(x) = (f_1 \otimes f_2)(x')$ con $x = (d_1, d_2), x' = (d_1', d_2')$, allora $f_1(d_1) = f_1(d_1')$ e $f_2(d_2) = f_2(d_2')$, quindi per l'iniettività di f_1 e f_2 si conclude che $d_1 = d_1'$ e $d_2 = d_2'$, ossia $x = x'$.

□

Possiamo quindi definire il prodotto anche sulle ep-pair:

Definizione 6.4.4 Siano D_1, D_2, E_1, E_2 *$\mathcal{BT}$-alberi* e siano $D_1 \stackrel{t_1}{\to} E_1, D_2 \stackrel{t_2}{\to} E_2$ due morfismi, con $t_1 = \langle i_1, j_1 \rangle$ e $t_2 = \langle i_2, j_2 \rangle$. Definiamo $t_1 \otimes t_2 = \langle i_1 \otimes i_2, j_1 \otimes j_2 \rangle : D_1 \otimes D_2 \to E_1 \otimes E_2$.

Proposizione 6.4.4 *Siano* D_1, D_2, E_1, E_2 $\mathcal{BT}$-alberi *e siano* $D_1 \stackrel{t_1}{\to} E_1, D_2 \stackrel{t_2}{\to} E_2$ *due morfismi, con* $t_1 = \langle i_1, j_1 \rangle$ *e* $t_2 = \langle i_2, j_2 \rangle$*. Allora* $t_1 \otimes t_2 : D_1 \otimes D_2 \to E_1 \otimes E_2$ *è un morfismo.*

Dim:

Sia $t_1 \otimes t_2 = \langle i', j' \rangle$; per la proposizione precedente i' è una *$\mathcal{BT}$-funzione* iniettiva e j' è una *$\mathcal{BT}$-funzione*. Resta da provare che $j' \circ i' = id_{D_1 \otimes D_2}$. Sia $x = (d_1, d_2) \in D_1 \otimes D_2$, si ha allora:

$$\begin{aligned}
&j' \circ i'(x) = \\
&\quad = (j_1 \otimes j_2) \circ (i_1 \otimes i_2)(x) = \\
&\quad = j_1 \otimes j_2(i_1(d_1), i_2(d_2)) = \\
&\quad = (j_1(i_1(d_1)), j_2(i_2(d_2))) = \\
&\quad = (d_1, d_2) = \\
&\quad = x
\end{aligned}$$

che è quanto si voleva.

□

Somma Coalescente

Definizione 6.4.5 Siano D_1, D_2, E_1, E_2 *$\mathcal{BT}$-alberi* e siano $f_1 : D_1 \to E_1$ e $f_2 : D_2 \to E_2$ due *$\mathcal{BT}$-funzioni*. Definiamo la funzione $f_1 \oplus f_2 : D_1 \oplus D_2 \to E_1 \oplus E_2$ nel modo seguente

$(f_1 \oplus f_2)(\bot) = \bot$
$(f_1 \oplus f_2)(i, d) = (i, f_i(d)) \quad \forall (i, d) \in D_1 \oplus D_2,\ i = 1, 2$

Proposizione 6.4.5 *Siano* D_1, D_2, E_1, E_2 $\mathcal{BT}$-alberi *e siano* $f_1 : D_1 \to E_1$ *e* $f_2 : D_2 \to E_2$ *due* $\mathcal{BT}$-funzioni. *Allora la funzione* $f_1 \oplus f_2 : D_1 \oplus D_2 \to E_1 \oplus E_2$ *è una* $\mathcal{BT}$-funzione.
Inoltre se f_1 *e* f_2 *sono iniettive allora anche* $f_1 \oplus f_2$ *è iniettiva.*

Dim:

Iniziamo osservando che $f_1 \oplus f_2$ è una $\mathcal{BT}$-*funzione*. Infatti chiaramente 'conserva' i livelli ed è monotona: siano $x, x' \in D_1 \oplus D_2$ con $x \sqsubseteq x'$; distinguiamo due casi:

- se $x = \bot$ allora $(f_1 \oplus f_2)(x) = \bot \sqsubseteq (f_1 \oplus f_2)(x')$ qualunque sia x'.
- se $x = (i, d)$ allora, per definizione di $\sqsubseteq_{\oplus}$, necessariamente $x' = (i, d')$ con $d \sqsubseteq d'$. Quindi, per la monotonia delle funzioni f_i, si conclude $(f_1 \oplus f_2)(x) = (i, f_i(d)) \sqsubseteq (i, f_i(d')) = (f_1 \oplus f_2)(x')$.

Inoltre, siano f_1 e f_2 iniettive. Se $(f_1 \oplus f_2)(x) = (f_1 \oplus f_2)(x') = z$ allora distinguiamo due casi:

- se $z = \bot$ allora $x = y = \bot$.
- se $z = (i, e)$ allora necessariamente $x = (i, d),\ x' = (i, d')$ con $f_i(d) = f_i(d') = e$. Dunque, essendo f_i iniettiva si conclude che $d = d'$ e quindi $x = x'$.

□

Possiamo quindi definire la somma anche sulle ep-pair:

Definizione 6.4.6 Siano D_1, D_2, E_1, E_2 $\mathcal{BT}$-*alberi* e siano $D_1 \overset{t_1}{\to} E_1, D_2 \overset{t_2}{\to} E_2$ due morfismi, con $t_1 = \langle i_1, j_1 \rangle$ e $t_2 = \langle i_2, j_2 \rangle$. Definiamo $t_1 \oplus t_2 = \langle i_1 \oplus i_2, j_1 \oplus j_2 \rangle : D_1 \oplus D_2 \to E_1 \oplus E_2$.

Proposizione 6.4.6 *Siano* D_1, D_2, E_1, E_2 $\mathcal{BT}$-alberi *e siano* $D_1 \overset{t_1}{\to} E_1, D_2 \overset{t_2}{\to} E_2$ *due morfismi, con* $t_1 = \langle i_1, j_1 \rangle$ *e* $t_2 = \langle i_2, j_2 \rangle$. *Allora* $t_1 \oplus t_2 : D_1 \oplus D_2 \to E_1 \oplus E_2$ *è un morfismo.*

Dim:

Sia $t_1 \oplus t_2 = \langle i', j' \rangle$; per la proposizione precedente i' è una $\mathcal{BT}$-*funzione* iniettiva e j' è una $\mathcal{BT}$-*funzione*. Resta da provare che $j' \circ i' = id_{D_1 \oplus D_2}$. Sia $x \in\in D_1 \oplus D_2$. Se $x = \bot$ allora chiaramente $j' \circ i'(x) = \bot = x$; altrimenti $x = (i, d)$ $(i = 1$ o $2)$ e quindi

$$\begin{aligned}
&j' \circ i'(x) = \\
&\quad = (j_1 \oplus j_2) \circ (i_1 \oplus i_2)(x) = \\
&\quad = j_1 \oplus j_2(i, i_i(d)) = \\
&\quad = (i, j_i(i_i(d))) = \\
&\quad = (i, d) = \\
&\quad = x
\end{aligned}$$

che è quanto si voleva.

□

Spazio delle Funzioni

Definizione 6.4.7 Siano D_1, D_2, E_1, E_2 *$\mathcal{BT}$-alberi* e siano $f_1 : E_1 \to D_1$ e $f_2 : D_2 \to E_2$ due *$\mathcal{BT}$-funzioni*. Definiamo la funzione $f_1 {\to_{BT}} f_2 : (D_1 {\to_{BT}} D_2) \to (E_1 {\to_{BT}} E_2)$ nel modo seguente

$$(f_1 {\to_{BT}} f_2)(f^{(k)}) = f_{2|D_2{}^{(k)}} \circ f^{(k)} \circ f_{1|E_1{}^{(k)}} \quad \forall f^{(k)} \in D_1 {\to_{BT}} D_2,\ level(f^{(k)}) = k$$

Proposizione 6.4.7 *Siano D_1, D_2, E_1, E_2 $\mathcal{BT}$*-alberi *e siano $f_1 : E_1 \to D_1$ e $f_2 : D_2 \to E_2$ due* $\mathcal{BT}$-funzioni. *Allora la funzione $f_1 {\to_{BT}} f_2 : (D_1 {\to_{BT}} D_2) \to (E_1 {\to_{BT}} E_2)$ è una* $\mathcal{BT}$-funzione. *Inoltre se f_1 è suriettiva e f_2 è iniettiva allora $f_1 {\to_{BT}} f_2$ è iniettiva.*

Dim:

Iniziamo osservando che $f_1 {\to_{BT}} f_2$ è una *$\mathcal{BT}$-funzione*. Infatti chiaramente 'conserva' i livelli ed è monotona: siano $f^{(k_1)}, f^{(k_2)} \in D_1 {\to_{BT}} D_2$, con $f^{(k_1)} \sqsubseteq f^{(k_2)}$; allora per ogni $e^{(k_1)}, e^{(k_2)} \in E_1$ di livello k_1 e k_2 rispettivamente, con $e^{(k_1)} \sqsubseteq e^{(k_2)}$ si ha che, per la monotonia di f_1:

$$f_1(e^{(k_1)}) \sqsubseteq f_1(e^{(k_2)})$$

dunque, essendo $f^{(k_1)} \sqsubseteq f^{(k_2)}$, si ha:

$$f^{(k_1)} \circ f_1(e^{(k_1)}) \sqsubseteq f^{(k_2)} \circ f_1(e^{(k_2)})$$

e quindi, per monotonia di f_2

$$f_2 \circ f^{(k_1)} \circ f_1(e^{(k_1)}) \sqsubseteq f_2 \circ f^{(k_2)} \circ f_1(e^{(k_2)})$$

Ossia $(f_1 {\to_{BT}} f_2)(f^{(k_1)})(e^{(k_1)}) \sqsubseteq (f_1 {\to_{BT}} f_2)(f^{(k_2)})(e^{(k_2)})$; si conclude perciò che $(f_1 {\to_{BT}} f_2)(f^{(k_1)}) \sqsubseteq (f_1 {\to_{BT}} f_2)(f^{(k_2)})$ e quindi la monotonia di $f_1 {\to_{BT}} f_2$.

Inoltre siano f_1 suriettiva e f_2 iniettiva. Se $(f_1 {\to_{BT}} f_2)(f) = (f_1 {\to_{BT}} f_2)(f') = g$, con f, f' di livello k, allora per ogni $d \in D_1{}^{(k)}$, per la suriettività di f_1 vi è $e \in E_1$ tale che $f_1(e) = d$. Ora:

$$f_2 \circ f(d) = f_2 \circ f \circ f_1(e) = g(e) = f_2 \circ f' \circ f_1(e) = f_2 \circ f'(d)$$

quindi $f_2 \circ f(d) = f_2 \circ f'(d)$. Per l'iniettività di f_2 ne segue che $f(d) = f'(d)$ e quindi per la genericità dell'elemento $d \in D_1{}^{(k)}$ si conclude che $f = f'$.

□

Possiamo quindi definire il morfismo legato allo spazio delle funzioni:

Definizione 6.4.8 Siano D_1, D_2, E_1, E_2 *$\mathcal{BT}$-alberi* e siano $D_1 \overset{t_1}{\to} E_1, D_2 \overset{t_2}{\to} E_2$ due morfismi, con $t_1 = \langle i_1, j_1 \rangle$ e $t_2 = \langle i_2, j_2 \rangle$. Definiamo $t_1 {\to_{BT}} t_2 = \langle j_1 {\to_{BT}} i_2, i_1 {\to_{BT}} j_2 \rangle : (D_1 {\to_{BT}} D_2) \to (E_1 {\to_{BT}} E_2)$.

Proposizione 6.4.8 *Siano D_1, D_2, E_1, E_2 $\mathcal{BT}$*-alberi *e siano $D_1 \overset{t_1}{\to} E_1, D_2 \overset{t_2}{\to} E_2$ due morfismi, con $t_1 = \langle i_1, j_1 \rangle$ e $t_2 = \langle i_2, j_2 \rangle$. Allora $t_1 {\to_{BT}} t_2 : (D_1 {\to_{BT}} D_2) \to (E_1 {\to_{BT}} E_2)$ è un morfismo.*

Dim:

Sia $t_1 {\to_{BT}} t_2 = \langle i', j' \rangle$; per la proposizione precedente i' è una *$\mathcal{BT}$-funzione* iniettiva e j' è una *$\mathcal{BT}$-funzione*. Resta da provare che $j' \circ i' = id_{D_1 \to_{BT} D_2}$. Sia $f \in D_1 {\to_{BT}} D_2$ un elemento di livello k. Si ha allora:

$$
\begin{aligned}
& j' \circ i'(f) = \\
& \quad = (i_1 \rightarrow_{BT} j_2) \circ (j_1 \rightarrow_{BT} i_2)(f) = \\
& \quad = i_1 \rightarrow_{BT} j_2 (i_2 \circ f \circ j_1)(= \\
& \quad = j_2 \circ i_2 \circ f \circ j_1 \circ i_1 = \\
& \quad = f
\end{aligned}
$$

che è quanto si voleva.

$\square$

Powerdomain

Definizione 6.4.9 Siano D e E due $\mathcal{BT}$*-alberi* e sia $f : D \to E$ una $\mathcal{BT}$*-funzione*. Definiamo la funzione $\mathcal{P}^*(f) : \mathcal{P}^*(D) \to \mathcal{P}^*(E)$ nel modo seguente

$$\mathcal{P}^*(f)(S) = \{f(d) : d \in S\} \quad \forall S \in \mathcal{P}^*(D)$$

Proposizione 6.4.9 *Siano D e E due* $\mathcal{BT}$-alberi *e sia $f : D \to E$ una* $\mathcal{BT}$-funzione*. Allora la funzione $\mathcal{P}^*(f) : \mathcal{P}^*(D) \to \mathcal{P}^*(E)$ è una* $\mathcal{BT}$-funzione.
Inoltre se f è iniettiva allora anche $\mathcal{P}^*(f)$ è iniettiva.

Dim:

Iniziamo osservando che $\mathcal{P}^*(f)$ è una $\mathcal{BT}$*-funzione*. Infatti chiaramente 'conserva' i livelli ed è monotona: siano $S, S' \in \mathcal{P}^*(D)$, con $S \sqsubseteq S'$, quindi

$$
\begin{aligned}
& \forall d \in S.\ \exists d' \in S'.\ d \sqsubseteq d' \\
& \forall d' \in S'.\ \exists d \in S.\ d \sqsubseteq d'
\end{aligned}
$$

quindi, essendo f monotona:

$$
\begin{aligned}
& \forall d \in S.\ \exists d' \in S'.\ f(d) \sqsubseteq f(d') \\
& \forall d' \in S'.\ \exists d \in S.\ f(d) \sqsubseteq f(d')
\end{aligned}
$$

per cui $\mathcal{P}^*(f)(S) \sqsubseteq \mathcal{P}^*(f)(S')$

Inoltre sia f iniettiva. Se $\mathcal{P}^*(f)(S) = \mathcal{P}^*(f)(S')$ allora $\{f(d) : d \in S\} = \{f(d') : d' \in S'\}$ e quindi per l'iniettività di f si conclude che $S = S'$.

$\square$

Possiamo quindi definire il morfismo associato al costruttore powerset:

Definizione 6.4.10 Siano D e E due $\mathcal{BT}$*-alberi* e sia $D \xrightarrow{t} E$ una $\mathcal{BT}$*-funzione*, con $t = \langle i, j \rangle$. Definiamo $\mathcal{P}^*(t) = \langle \mathcal{P}^*(i), \mathcal{P}^*(j) \rangle : \mathcal{P}^*(D) \to \mathcal{P}^*(E)$.

Proposizione 6.4.10 *Siano D e E due* $\mathcal{BT}$-alberi *e sia $D \xrightarrow{t} E$ un morfismo, con $t = \langle i, j \rangle$. Allora $\mathcal{P}^*(t) : \mathcal{P}^*(D) \to \mathcal{P}^*(E)$ è un morfismo.*

Dim:

Sia $\mathcal{P}^*(t) = \langle i', j' \rangle$; per la proposizione precedente i' è una $\mathcal{BT}$*-funzione* iniettiva e j' è una $\mathcal{BT}$*-funzione*. Resta da provare che $j' \circ i' = id_{\mathcal{P}^*(D)}$. Sia $S \in \mathcal{P}^*(D)$, si ha allora:

$$
\begin{aligned}
&j' \circ i'(S) = \\
&\quad = \mathcal{P}^*(j) \circ \mathcal{P}^*(i)(S) = \\
&\quad = \mathcal{P}^*(j)(\{i(d) : d \in S\}) = \\
&\quad = \{j(i(d)) : d \in S\} = \\
&\quad = \{d : d \in S\} = \\
&\quad = S
\end{aligned}
$$

che è quanto si voleva.

□

6.4.2 La Classe di Funtori $\mathcal{F}$

La classe $\mathcal{F}$ è definita come un linguaggio sull'alfabeto:

$$\{F_{D_0}, \perp, \otimes, \oplus, \rightarrow_{BT}, \mathcal{P}^*, \circ\}$$

dove D_0 è un generico $\mathcal{BT}$-*albero*. La definizione è la seguente: $F \in \mathcal{F}$:

$$F ::= F_{D_0} \mid \perp_F \mid F \otimes F \mid F \oplus F \mid F \rightarrow_{BT} F \mid \mathcal{P}^*(F) \mid F \circ F$$

Ogni elemento $F \in \mathcal{F}$ è interpretato come un funtore:

$$F : \mathcal{BT}ep \rightarrow \mathcal{BT}ep$$

Si procede in modo induttivo: specificando per ogni $F \in \mathcal{F}$:

- FD per ogni $\mathcal{BT}$-*albero* D
- Ft per ogni morfismo t

a. $F_{D_0} D = D_0$
   $F_{D_0} t = \langle id_{D_0}, id_{D_0} \rangle$

b. $F_\perp D = (FD)_\perp$
   $F_\perp t = (Ft)_\perp$

c. $(F_1 \otimes F_2)D = F_1 D \otimes F_2 D$
   $(F_1 \otimes F_2)t = F_1 t \otimes F_2 t$

d. $(F_1 \oplus F_2)D = F_1 D \oplus F_2 D$
   $(F_1 \oplus F_2)t = F_1 t \oplus F_2 t$

e. $(F_1 \rightarrow_{BT} F_2)D = F_1 D \rightarrow_{BT} F_2 D$
   $(F_1 \rightarrow_{BT} F_2)t = F_1 t \rightarrow_{BT} F_2 t$

f. $\mathcal{P}^*(F)D = \mathcal{P}^*(D)$
   $\mathcal{P}^*(F)t = \mathcal{P}^*(t)$

g. $F_1 \circ F_2$ è l'usuale composizione di funtori.

Continuiamo osservando che la precedente è una buona definizione, ovvero che per ogni $F \in \mathcal{F}$, F commuta rispetto alla composizione di morfismi e all'identità.

Proposizione 6.4.11 *Per ogni $F \in \mathcal{F}$, $F : \mathcal{BT}ep \to \mathcal{BT}ep$ è un funtore ben definito, ovvero:*

i. $F(t_1 \circ t_2) = Ft_1 \circ Ft_2$

ii. $F1_D = 1_{FD}$
(dove con 1_D si indica il morfismo identità $\langle id_D, id_D \rangle$)

Dim:

La dimostrazione procede per induzione sulla struttura di $\mathcal{F}$ ed è immediata; vediamo ad esempio il caso $F = F_1 {\to_{BT}} F_2$. Si ha:

i. siano $D \xrightarrow{t} E$ e $E \xrightarrow{u} F$ due morfismi, con $t = \langle i, j \rangle$ e $u = \langle h, k \rangle$. Allora, posto $F_i t = \langle i_i, j_i \rangle$ e $F_i u = \langle h_i, k_i \rangle$ per $i = 1, 2$ si ha:

$$\begin{aligned}
&Fu \circ Ft = \\
&\quad = \langle \lambda x.\ h_2 \circ x \circ k_1, \lambda y.\ k_2 \circ y \circ h_1 \rangle \circ \langle \lambda x.\ i_2 \circ x \circ j_1, \lambda y.\ j_2 \circ y \circ i_1 \rangle = \\
&\quad = \langle \lambda x.\ h_2 \circ i_2 \circ x \circ j_1 \circ k_1, \lambda y.\ j_2 \circ k_2 \circ y \circ h_1 \circ i_1 \rangle = \\
&\quad = (F_1 u \circ F_1 t) {\to_{BT}} (F_2 u \circ F_2 t) = \quad \text{per ip. ind.} \\
&\quad = F_1(u \circ t) {\to_{BT}} F_2(u \circ t) = \\
&\quad = (F_1 {\to_{BT}} F_2)(u \circ t)
\end{aligned}$$

ii. Sia D un oggetto in $\mathcal{BT}ep$, allora, per ipotesi induttiva:

$$F_1 1_D = 1_{F_1 D} \quad \text{e} \quad F_2 1_D = 1_{F_2 D}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
&F1_D = \\
&\quad = F_1 1_D {\to_{BT}} F_2 1_D = \\
&\quad = \langle \lambda x.\ id_{F_2 D} \circ x \circ id_{F_1 D}, \lambda y.\ id_{F_2 D} \circ y \circ id_{F_1 D} \rangle = \\
&\quad = \langle \lambda x.\ x, \lambda y.\ y \rangle = \\
&\quad = 1_{FD}
\end{aligned}$$

$\square$

6.4.3 Funtori Contraenti in $\mathcal{F}$

Vogliamo ora associare a ciascun funtore $F \in \mathcal{F}$ un coefficiente $c(F)$ che rappresenta una misura della contrattività di F, nel senso che ogni funtore $F \in \mathcal{F}$ è $c(F)$-contraente.
Questo consentirà di stabilire in modo semplice che un funtore $F \in \mathcal{F}$ è contraente e quindi ha un unico punto fisso in $\mathcal{BT}ep$.

Definizione 6.4.11 Ad ogni funtore $F \in \mathcal{F}$ si associa un *coefficiente di contrattività* $c(F) \in N \cup \{+\infty\}$, definito induttivamente come segue:

a. $c(F_{D_0}) = +\infty$

b. $c(F_\perp) = c(F) + 1$

c. $c(F_1 \otimes F_2) = \min\{c(F_1), c(F_2)\}$

d. $c(F_1 \oplus F_2) = \min\{c(F_1), c(F_2)\}$

e. $c(F_1 {\to_{BT}} F_2) = \min\{c(F_1), c(F_2)\}$

f. $c(\mathcal{P}^*(F)) = c(F)$

g. $c(F_1 \circ F_2) = c(F_1) + c(F_2)$

Proposizione 6.4.12 *Sia F un funtore in $\mathcal{F}$. Allora, per ogni morfismo t:*

$$h(Ft) \geq c(F) + h(t)$$

Dim:

Si procede per induzione sulla struttura di $\mathcal{F}$. Nel seguito, per semplificare la notazione si supporrà sempre di avere un generico morfismo $D \xrightarrow{t} E$ in $\mathcal{BT}ep$, con $t = \langle i, j \rangle$; supporremo inoltre che per $i = 1, 2$ sia $F_i t = t_i = \langle i_i, j_i \rangle$ e $F_i D = D_i$, $F_i E = E_i$.

a. $F = F_{D_0}$

$$h(F_{D_0} t) = h(1_{D_0}) = +\infty = c(F_{D_0}) + h(t)$$

qualunque sia $h(t)$.

b. $F = F_{1\perp}$
Ricordando che $i_{1\perp}$ $(j_{1\perp})$ su $\perp$ vale $\perp$ e su D_1 (E_1) si comporta come i_1 (j_1) si ha:

$$\begin{aligned}
&h(F_{1\perp} t) = \\
&\quad = \sup\{k : i_{1\perp} \circ j_{1\perp}(y) = y \ \forall y \in {E_{1\perp}}^{(k)}\} = \\
&\quad = \sup\{k : i_1 \circ j_1(e) = e \ \forall e \in {E_1}^{(k)}\} + 1 = \\
&\quad = h(F_1 t) + 1 \geq \quad \text{per ip. ind.} \\
&\quad \geq c(F_1) + h(t) + 1 = \\
&\quad = c(F_{1\perp}) + h(t)
\end{aligned}$$

c. $F = F_1 \otimes F_2$

$$\begin{aligned}
&h((F_1 \otimes F_2)t) = \\
&\quad = \sup\{k : (i_1 \otimes i_2) \circ (j_1 \otimes j_2)(e_1, e_2) = (e_1, e_2) \ \forall (e_1, e_2) \in (E_1 \otimes E_2)^{(k)}\} = \\
&\quad = \sup\{k : (i_1 \circ j_1(e_1), i_2 \circ j_2(e_2)) = (e_1, e_2) \ \forall (e_1, e_2) \in (E_1 \otimes E_2)^{(k)}\} = \\
&\quad = \sup\{k : i_1 \circ j_1(e_1) = e_1 \quad e \quad i_2 \circ j_2(e_2) = e_2 \ \forall e_1 \in {E_1}^{(k)}, \ e_2 \in {E_2}^{(k)}\} = \\
&\quad = \min\{\sup\{k : i_1 \circ j_1(e_1) = e_1 \ \forall e_1 \in {E_1}^{(k)}\}, \sup\{k : i_2 \circ j_2(e_2) = e_2 \ \forall e_2 \in {E_2}^{(k)}\}\} = \\
&\quad = \min\{h(F_1 t), h(F_2 t)\} \geq \quad \text{per ip. ind} \\
&\quad \geq \min\{c(F_1) + h(t), c(F_2) + h(t)\} = \\
&\quad = \min\{c(F_1), c(F_2)\} + h(t) = \\
&\quad = c(F_1 \otimes F_2) + h(t)
\end{aligned}$$

d. $F = F_1 \oplus F_2$

Si ha che

$$h((F_1 \oplus F_2)t) = \sup\{k : (i_1 \oplus i_2) \circ (j_1 \oplus j_2)(y) = y \ \forall y \in (E_1 \oplus E_2)^{(k)}\}$$

quindi, dato che su $\perp$ le funzioni $i_1 \oplus i_2$ e $j_1 \oplus j_2$ valgono $\perp$ si può scrivere che:

$$\begin{aligned}
&h((F_1 \oplus F_2)t) = \\
&\quad = \sup\{k : (i_1 \oplus i_2) \circ (j_1 \oplus j_2)(i, e_i) = (i, e_i) \ \forall (i, e_i) \in (E_1 \oplus E_2)^{(k)},\ k > 0,\ i = 1, 2\} = \\
&\quad = \sup\{k : (i, i_i \circ j_i(e_i)) = (i, e_i) \ \forall e_i \in {E_i}^{(k)},\ i = 1, 2\} = \\
&\quad = \sup\{k : i_1 \circ j_1(e_1) = e_1 \quad e \quad i_2 \circ j_2(e_2) = e_2 \ \forall e_1 \in {E_1}^{(k)},\ e_2 \in {E_2}^{(k)}\} = \\
&\quad = \min\{\sup\{k : i_1 \circ j_1(e_1) = e_1 \ \forall e_1 \in {E_1}^{(k)}\}, \sup\{k : i_2 \circ j_2(e_2) = e_2 \ \forall e_2 \in {E_2}^{(k)}\}\} = \\
&\quad = \min\{h(F_1 t), h(F_2 t)\} \geq \quad \text{per ip. ind} \\
&\quad \geq \min\{c(F_1) + h(t), c(F_2) + h(t)\} = \\
&\quad = c(F_1 \oplus F_2) + h(t)
\end{aligned}$$

e. $F = F_1 \rightarrow_{BT} F_2$

$$\begin{aligned}
&h((F_1 \rightarrow_{BT} F_2)t) = \\
&\quad = \sup\{k : (j_1 \rightarrow_{BT} i_2) \circ (i_1 \rightarrow_{BT} j_2)(f) = f \ \forall f \in (E_1 \rightarrow_{BT} E_2)^{(k)}\} = \\
&\quad = \sup\{k : i_2 \circ j_2 \circ f \circ i_1 \circ j_1(f) = f \ \forall f \in (E_1 \rightarrow_{BT} E_2)^{(k)},\ i = 1, 2\} \geq
\end{aligned}$$

dato che per $k \leq h(F_i t)$ si ha che $i_i \circ j_{i|{E_i}^{(k)}} = id_{{E_i}^{(k)}}$ si prosegue:

$$\begin{aligned}
&\quad \geq \min\{h(F_1 t), h(F_2 t)\} \geq \quad \text{per ip. ind} \\
&\quad \geq \min\{c(F_1) + h(t), c(F_2) + h(t)\} = \\
&\quad = c(F_1 \rightarrow_{BT} F_2) + h(t)
\end{aligned}$$

f. $F = \mathcal{P}^*(F_1)$

$$\begin{aligned}
&h(\mathcal{P}^*(F_1)t) = \\
&\quad = \sup\{k : \mathcal{P}^*(i_1) \circ \mathcal{P}^*(j_1)(S') = S' \ \forall S' \in \mathcal{P}^*(E_1)^{(k)}\} = \\
&\quad = \sup\{k : \{i_1 \circ j_1(e) : e \in S'\} = S' \ \forall S' \in \mathcal{P}^*(E_1)^{(k)}\} = \\
&\quad = \sup\{k : i_1 \circ j_1(e) = e \ \forall e \in {E_1}^{(k)}\} = \\
&\quad = h(F_1 t) \geq \quad \text{per ip. ind.} \\
&\quad \geq c(F_1) + h(t) = \\
&\quad = c(\mathcal{P}^*(F_1)) + h(t)
\end{aligned}$$

g. $F = F_1 \circ F_2$

$$\begin{aligned}
&h((F_1 \circ F_2)t) = \\
&\quad = h(F_1(F_2(t))) \geq \quad \text{per ip. ind.} \\
&\quad = c(F_1) + h(F_2 t) \geq \quad \text{per ip. ind.} \\
&\quad = c(F_1) + c(F_2) + h(t) = \\
&\quad = c(F_1 \circ F_2) + h(t)
\end{aligned}$$

□

A questo punto, si ha un immediato corollario, che consente di individuare una classe di equazioni di dominio in $\mathcal{BT}ep$, aventi un'unica soluzione in tale categoria (a meno di isomorfismi):

Corollario 6.4.1 *Ogni equazione di dominio riflessiva in $\mathcal{BT}ep$ della forma:*

$$D \cong FD$$

con $F \in \mathcal{F}$, tale che $c(F) > 0$, ha un'unica soluzione, a meno di isomorfismi.

Dim:

È sufficiente osservare che se $c(F) > 0$, allora per la proposizione precedente F è contraente e quindi si conclude per il teorema di punto fisso 6.3.1 in $\mathcal{BT}ep$.

□

Capitolo 7

Conclusioni

Il lavoro ha mostrato che la rappresentazione degli spazi ultrametrici compatti tramite alberi sfere formali è, in molti casi, particolermente conveniente. Le nozioni sugli alberi risultano spesso più semplici delle corrispondenti nozioni metriche (si veda ad esempio la definizione di ep-pair) ed i concetti e i risultati estremamente più intuitivi e comprensibili (ad esempio, per un morfismo t, il significato del valore $h(t)$ è chiaramente visualizzabile, contrariamente a quello di $\delta(t)$ del caso metrico). Oltre a consentire una formulazione più sintetica, l'uso degli alberi ha semplificato la dimostrazione dei risultati di America e Rutten.
Particolarmente interessante è l'eliminazione dell'ipotesi di Hom-contraenza, nel teorema di esistenza ed unicità del punto fisso per endofuntori nella categoria. Tale risultato è stato provato nel caso dei $\mathcal{BT}$*-alberi* e quindi degli spazi ultrametrici compatti, ma appare immediatamente estendibile agli spazi ultrametrici completi e probabilmente agli stessi spazi completi considerati da America e Rutten. Ciò può costituire un argomento per ulteriori sviluppi.

Bibliografia

[1] P. America and J. Rutten. Solving reflexive domain equation in a category of complete metric spaces. *Journal of Computer and System Sciences*, (39):343–375, 1989.

[2] J. I. De Bakker, Zucker. Processes and the denotational semantics of concurrency. *Information and Control*, (54):70–120, 1982.

[3] E. G. Silov. *Analisi Matematica*. MIR, Mosca, 1979.

[4] K. Kuratowsky. *Topology*. Academic Press, New York, 1971.

[5] P. T. Johnstone. *Stone Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[6] H. Herrlich and G. E Strecker. *Category Theory. An Introduction*. Heldermann Verlag, Berlin, 1979.

[7] D. A. Schmidth. *Denotational Semantic. A Methodology for Language Development*. Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, Iowa, 1988.

[8] C. A. Gunter. *Semantic of Programming Language*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1992.

[9] J. W. De Bakker. Control flow semantics. Corso estivo presso l'Università di Udine, 1993.

[10] F. Alessi and M. Lenisa. Stone duality for trees of ball. Rapporto interno dell'Università di Udine.

[11] M. Daniele. Confronto tra semantica metrica e semantica cpo-based per linguaggi sequenziali e concorrenti. Tesi di Laurea. Università di Udine, Marzo 1994.