

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari B

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)

Fornire la definizione di somma diretta di sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^n$.

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Fornire una definizione per il determinante di una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Fornire la definizione di base ortonormale di un sottospazio T di $V = \mathbb{R}^n$.

Esercizio 1. (V. 4 punti.)

Data la matrice $A \in M_{n,n}$ dimostrare che se

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \text{vale} \quad \|v\| = \left\| \begin{pmatrix} A \\ v \end{pmatrix} \right\|$$

allora A è un'isometria. (Occorre dimostrare che A conserva il prodotto scalare!)

Esercizio 2. (V. 2 punti.)

Trovare le radici (in \mathbb{C}) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{2015} - (2 - i)z^{2014} + (3 - i)z^{2013}$$

Esercizio 3. (V. 8 punti.)

Risolvere al variare di k in \mathbb{R} il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - ky &= k^2 \\ (y + z) - 2ky &= k^2 - 2k \\ x - (y + z) &= k(k + 1) \end{cases}$$

Esercizio 4. (V. 6 punti.)

Data la matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
- (b) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sia \mathcal{B}_1 la base di \mathbb{R}^2 costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (-1, 1)$ e sia \mathcal{B}_2 la base di \mathbb{R}^3 costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1)$ e $w_3 = (-1, 1, 1)$. Sia infine

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche. Calcolare i coefficienti della matrice $A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f)$.

Esercizio 6. (V. 6 punti.)

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano r ed s le seguenti rette:

$$r = (1, 0, 1) + \langle (0, 1, 0) \rangle$$

$$s = (-1, 1, 0) + \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Calcolare la distanza tra le due rette ed i punti di minima distanza Q_1 e Q_2 .

