

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari D

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)

Fornire la definizione di spazio vettoriale.

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Completare la seguente affermazione.

Dato $T \leq \mathbb{R}^n$ se $W = T^\perp$ allora tra le dimensioni di T e W vale la seguente relazione:

$$\dim(W) = \dots$$

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Fornire la definizione di polinomio caratteristico di una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 1.[Disuguaglianza triangolare] (V. 4 punti.)

Dimostrare che:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \text{vale} \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Esercizio 2. (V. 2 punti.)

Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, calcolare z^{2015}

Esercizio 3. (V. 8 punti.)

Risolvere al variare di k in \mathbb{R} il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - ky &= k \\ (y + z) - 2ky &= k - 2k^2 \\ x - (y + z) &= k(k + 1) \end{cases}$$

Esercizio 4. (V. 6 punti.)

Data la matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
- (b) Trovare, se esiste, una matrice $H \in GL_4$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale.

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sia \mathcal{B}_1 la base di \mathbb{R}^2 costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (3, 1)$ e sia \mathcal{B}_2 la base di \mathbb{R}^3 costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1)$ e $w_3 = (2, 1, 1)$. Sia infine

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche. Calcolare i coefficienti della matrice $A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f)$.

Esercizio 6. (V. 6 punti.)

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano r ed s le seguenti rette:

$$r = (0, 1, 1) + \langle (1, 0, 0) \rangle$$

$$s = (1, -1, 0) + \langle (1, 0, 1) \rangle$$

Calcolare la distanza tra le due rette ed i punti di minima distanza Q_1 e Q_2 .

