

**COGNOME e NOME** .....

**N. MATRICOLA**.....

**Quesiti preliminari C**

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

**Quesito 1.** (V. 1 punto.)

Siano  $v_1, \dots, v_k$  vettori di  $V = \mathbb{R}^n$ . Cosa si intende per “una combinazione lineare dei vettori  $v_1, \dots, v_k$ ”?

**Quesito 2.** (V. 1 punto.)

Data la matrice  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , sia  $f_A$  l'applicazione lineare associata ad  $A$ , quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- (a)  $RANK(A)$  = numero massimo di righe di  $A$  linearmente indipendenti.
- (b)  $RANK(A)$  = numero massimo di colonne di  $A$  linearmente indipendenti.
- (c)  $RANK(A)$  = dimensione del nucleo di  $f_A$ .
- (d)  $RANK(A)$  = dimensione dell'immagine di  $f_A$ .

**Quesito 3.** (V. 1 punto.)

Fornire la definizione di base ortogonale di un sottospazio  $T$  di  $V = \mathbb{R}^n$ .

**Esercizio 1**[Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz]. (V. 4 punti.)  
Dimostrare che

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \text{vale} \quad |v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

**Esercizio 2.** (V. 2 punti.)

Trovare le radici (in  $\mathbb{C}$ ) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a)  $p(z) = z^3 - 1$

(b)  $p(z) = z^3 - i$

**Esercizio 3.** (V. 8 punti.)

Risolvere al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$  il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + ky &= k \\ 2ky - (y + z) &= k - 2k^2 \\ x + y + z &= k(k + 1) \end{cases}$$



**Esercizio 4.** (V. 6 punti.)

Data la matrice  $A$ :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di  $A$  e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
- (b) Trovare, se esiste, una matrice  $H \in GL_4$  tale che posto  $D := H^{-1}AH$  si abbia  $D$  matrice diagonale.



**Esercizio 5.** (V. 4 punti.)

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'applicazione lineare. Sia  $\mathcal{B}_1$  la base di  $\mathbb{R}^2$  costituita dai vettori nell'ordine  $v_1 = (1, 0)$  e  $v_2 = (2, 1)$  e sia  $\mathcal{B}_2$  la base di  $\mathbb{R}^3$  costituita dai vettori nell'ordine  $w_1 = (1, 0, 0)$ ,  $w_2 = (2, 0, 1)$  e  $w_3 = (-1, 1, 1)$ . Sia infine

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche. Calcolare i coefficienti della matrice  $A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f)$ .



**Esercizio 6.** (V. 6 punti.)

In  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  siano  $r$  ed  $s$  le seguenti rette:

$$r = (1, 1, 0) + \langle (0, 0, 1) \rangle$$

$$s = (0, -1, 1) + \langle (1, 0, 1) \rangle$$

Calcolare la distanza tra le due rette ed i punti di minima distanza  $Q_1$  e  $Q_2$ .

