

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari B

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)

Siano v_1, \dots, v_k vettori di $V = \mathbb{R}^n$. Cosa si intende per “i vettori v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti”?

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e sia λ un autovalore di A . Definire la molteplicità geometrica dell'autovalore λ .

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni $T \leq V = \mathbb{R}^n$ e per ogni \mathcal{B} base di T .

- (a) Se \mathcal{B} è una base ortogonale allora è anche una base ortonormale.
- (b) Se \mathcal{B} è una base ortonormale allora è anche una base ortogonale.
- (c) I vettori di \mathcal{B} hanno norma maggiore di zero.
- (d) La base \mathcal{B} è costituita da n vettori.

Esercizio 1. (V. 3 punti.)

Siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che se per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\overbrace{v} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \end{pmatrix} = \overbrace{v} \begin{pmatrix} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \end{pmatrix}$$

allora $A = B$.

Esercizio 2. (V. 2 punti.)

Trovare le radici (in \mathbb{C}) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{12} + z^8 - z^4 - 1$$

Esercizio 3. (V. 4 punti.)

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^\perp$. Determinare una base per T , una base per W , un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. (V. 3 punti.)

Siano T e W i due sottospazi di \mathbb{R}^4 definiti da:

$$T = \langle (4, -4, 0, 3), (4, -3, 0, 3), (4, 4, 0, 3) \rangle$$

$$W = \langle (3, -3, 0, 4), (3, -4, 0, 4), (3, 3, 0, 4) \rangle.$$

Sia infine A la matrice associata alla proiezione ortogonale sullo spazio T .

- (a) Stabilire se gli spazi T e W sono uguali.
- (b) Trovare una base ortonormale per T .
- (c) Calcolare i coefficienti della matrice A .

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 4-t & t-2 & 0 \\ 2-t & t & 0 \\ 2t-4 & 2-t & t \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (In funzione di t .)
- (b) Per quali valori di t esiste una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

Esercizio 6. (V. 14 punti.)

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano π_1 ed π_2 i seguenti piani:

$$\pi_1 = P_1 + T_1 \quad \text{con} \quad P_1 = (1, 1, 0) \text{ e } T_1 = \langle (0, -1, 1), (1, 0, -1) \rangle;$$

$$\pi_2 = P_2 + T_2 \quad \text{con} \quad P_2 = (1, 0, 1) \text{ e } T_2 = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Siano inoltre $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $W_1 = T_1^\perp$ e $W_2 = T_2^\perp$.

- (a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
- (b) Trovare una base per W_1 e una per W_2 .
- (c) Determinare delle costanti a, b, c e a', b', c' tali che: T_1 è lo spazio delle soluzioni di $ax+by+cz = 0$ e T_2 è lo spazio delle soluzioni di $a'x+b'y+c'z = 0$.
- (d) Determinare le equazioni cartesiane per π_1 e π_2 .
- (e) Determinare (se esistono) un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P + \langle v \rangle$.
- (f) Determinare il fascio di piani Φ che ha come luogo fisso la retta r .
- (g) Sia $P_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste, un piano π_3 del fascio Φ passante per P_3 .

