

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari D

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)

Siano v_1, \dots, v_k vettori di $V = \mathbb{R}^n$. Cosa si intende per “una combinazione lineare dei vettori v_1, \dots, v_k ”?

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Quale differenza c'è tra una base ortogonale e una base ortonormale.

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni coppia T e W di sottospazi di \mathbb{R}^n tali che $\forall v \in T$ e $\forall w \in W$ si abbia $v \cdot w = 0$.

- (a) $\dim(T) + \dim(W) = n$
- (b) $\dim(T) + \dim(W) \leq n$
- (c) $\dim(T) + \dim(W) \geq n$
- (d) $\dim(T) = \dim(W)$

Esercizio 1. (V. 3 punti.) [Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz]
Dimostrare che

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \text{vale} \quad |v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Esercizio 2. (V. 2 punti.)

Trovare le radici (in \mathbb{C}) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^4 - 1$

(b) $p(z) = z^4 + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Esercizio 3. (V. 4 punti.)

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^\perp$. Determinare una base per T , una base per W , un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. (V. 3 punti.)

Siano T e W i due sottospazi di \mathbb{R}^4 definiti da:

$$T = \langle (4, -4, 0, -3), (4, -3, 0, -3), (4, 4, 0, -3) \rangle$$

$$W = \langle (3, -3, 0, -4), (3, -4, 0, -4), (3, 3, 0, -4) \rangle.$$

Sia infine A la matrice associata alla proiezione ortogonale sullo spazio T .

- (a) Stabilire se gli spazi T e W sono uguali.
- (b) Trovare una base ortonormale per T .
- (c) Calcolare i coefficienti della matrice A .

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 6-t & t-3 & 0 \\ 3-t & t & 0 \\ 2t-6 & 3-t & t \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (In funzione di t .)
- (b) Per quali valori di t esiste una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

Esercizio 6. (V. 14 punti.)

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano π_1 ed π_2 i seguenti piani:

$$\pi_1 = P_1 + T_1 \quad \text{con} \quad P_1 = (1, -1, 0) \text{ e } T_1 = \langle (0, 1, -1), (1, 0, 1) \rangle;$$

$$\pi_2 = P_2 + T_2 \quad \text{con} \quad P_2 = (1, 0, -1) \text{ e } T_2 = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Siano inoltre $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $W_1 = T_1^\perp$ e $W_2 = T_2^\perp$.

- (a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
- (b) Trovare una base per W_1 e una per W_2 .
- (c) Determinare delle costanti a, b, c e a', b', c' tali che: T_1 è lo spazio delle soluzioni di $ax+by+cz=0$ e T_2 è lo spazio delle soluzioni di $a'x+b'y+c'z=0$.
- (d) Determinare le equazioni cartesiane per π_1 e π_2 .
- (e) Determinare (se esistono) un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P + \langle v \rangle$.
- (f) Determinare il fascio di piani Φ che ha come luogo fisso la retta r .
- (g) Sia $P_3 = (1, -1, -1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste, un piano π_3 del fascio Φ passante per P_3 .

