

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari A

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)

Fornire la definizione di sottospazio vettoriale T di uno spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$.

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e sia λ un autovalore di A . Definire l'autospazio di A relativo all'autovalore λ .

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

- (a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- (b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- (c) $\det(A) > 0 \Rightarrow A$ è invertibile
- (d) $\det(A \cdot {}^t B) = \det(B \cdot {}^t A)$

Esercizio 1. (V. 3 punti.)

Sia $T \leq \mathbb{R}^n$, sia $\mathcal{B}_T = (v_1, \dots, v_k)$ una base ortonormale di T . Dato $w \in \mathbb{R}^n$ definiamo w_1 e w_2 nel seguente modo:

$$\begin{aligned}w_1 &:= (w \cdot v_1)v_1 + \dots + (w \cdot v_k)v_k \\w_2 &:= w - w_1\end{aligned}$$

dimostrare che

- (a) $w_1 + w_2 = W$
- (b) $w_1 \in T$
- (c) $w_2 \in T^\perp$

Esercizio 2. (V. 2 punti.)

Trovare le radici (in \mathbb{C}) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^4 - 1$

(b) $p(z) = z^4 + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

Esercizio 3. (V. 4 punti.)

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^\perp$. Determinare una base per T , una base per W , un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. (V. 3 punti.)

Siano T e W i due sottospazi di \mathbb{R}^4 definiti da:

$$T = \langle (4, 4, 3, 0), (4, 3, 3, 0), (4, -4, 3, 0) \rangle$$

$$W = \langle (3, 3, 4, 0), (3, 4, 4, 0), (3, -3, 4, 0) \rangle.$$

Sia infine A la matrice associata alla proiezione ortogonale sullo spazio T .

- (a) Stabilire se gli spazi T e W sono uguali.
- (b) Trovare una base ortonormale per T .
- (c) Calcolare i coefficienti della matrice A .

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 4-t & 0 & t-2 \\ 2t-4 & t & 2-t \\ 2-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (In funzione di t .)
- (b) Per quali valori di t esiste una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

Esercizio 6. (V. 14 punti.)

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano π_1 ed π_2 i seguenti piani:

$$\pi_1 = P_1 + T_1 \quad \text{con} \quad P_1 = (1, 0, 1) \text{ e } T_1 = \langle (0, 1, -1), (1, -1, 0) \rangle;$$

$$\pi_2 = P_2 + T_2 \quad \text{con} \quad P_2 = (1, 1, 0) \text{ e } T_2 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

Siano inoltre $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $W_1 = T_1^\perp$ e $W_2 = T_2^\perp$.

- (a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
- (b) Trovare una base per W_1 e una per W_2 .
- (c) Determinare delle costanti a, b, c e a', b', c' tali che: T_1 è lo spazio delle soluzioni di $ax+by+cz = 0$ e T_2 è lo spazio delle soluzioni di $a'x+b'y+c'z = 0$.
- (d) Determinare le equazioni cartesiane per π_1 e π_2 .
- (e) Determinare (se esistono) un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P + \langle v \rangle$.
- (f) Determinare il fascio di piani Φ che ha come luogo fisso la retta r .
- (g) Sia $P_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste, un piano π_3 del fascio Φ passante per P_3 .

