

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari C

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)

Fornire la definizione di matrici simili.

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e per ogni λ autovalore di A .

- (a) La molteplicità geometrica di λ è maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.
- (b) La somma della molteplicità algebrica di λ e della sua molteplicità geometrica è uguale a n .
- (c) La molteplicità algebrica di λ è minore o uguale a n
- (d) La molteplicità geometrica di λ è maggiore o uguale a 1

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

- (a) A è una matrice ortogonale se e solo se ${}^tAA = I$.
- (b) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base di \mathbb{R}^n .
- (c) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base ortogonale di \mathbb{R}^n .
- (d) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n .

Esercizio 1. (V. 3 punti.)

Siano $A, O \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ due matrici con O matrice ortogonale, sia $D := O^{-1}AO$. Dimostrare che se D è una matrice diagonale allora A è una matrice simmetrica.

Esercizio 2. (V. 2 punti.)

Sia $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + bi = z^{2015}$.

Esercizio 3. (V. 4 punti.)

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^\perp$. Determinare una base per T , una base per W , un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. (V. 3 punti.)

Siano T e W i due sottospazi di \mathbb{R}^4 definiti da:

$$T = \langle (4, 4, -3, 0), (4, 3, -3, 0), (4, -4, -3, 0) \rangle$$

$$W = \langle (3, 3, -4, 0), (3, 4, -4, 0), (3, -3, -4, 0) \rangle.$$

Sia infine A la matrice associata alla proiezione ortogonale sullo spazio T .

- (a) Stabilire se gli spazi T e W sono uguali.
- (b) Trovare una base ortonormale per T .
- (c) Calcolare i coefficienti della matrice A .

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 6-t & 0 & t-3 \\ 2t-6 & t & 3-t \\ 3-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (In funzione di t .)
- (b) Per quali valori di t esiste una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

Esercizio 6. (V. 14 punti.)

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano π_1 ed π_2 i seguenti piani:

$$\pi_1 = P_1 + T_1 \quad \text{con} \quad P_1 = (1, 0, -1) \text{ e } T_1 = \langle (0, -1, 1), (1, 1, 0) \rangle;$$

$$\pi_2 = P_2 + T_2 \quad \text{con} \quad P_2 = (1, -1, 0) \text{ e } T_2 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

Siano inoltre $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $W_1 = T_1^\perp$ e $W_2 = T_2^\perp$.

- (a) Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
- (b) Trovare una base per W_1 e una per W_2 .
- (c) Determinare delle costanti a, b, c e a', b', c' tali che: T_1 è lo spazio delle soluzioni di $ax+by+cz = 0$ e T_2 è lo spazio delle soluzioni di $a'x+b'y+c'z = 0$.
- (d) Determinare le equazioni cartesiane per π_1 e π_2 .
- (e) Determinare (se esistono) un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P + \langle v \rangle$.
- (f) Determinare il fascio di piani Φ che ha come luogo fisso la retta r .
- (g) Sia $P_3 = (1, -1, -1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste, un piano π_3 del fascio Φ passante per P_3 .

