

SOLUZIONI

Sono esclusi dalle soluzioni i quesiti sulle definizioni e le dimostrazioni dei teoremi visti a lezione. Per gli esercizi 3, 4, 5 e 6 è riportata la soluzione della sola traccia A.

Quesiti preliminari vero o falso.

Quesito A.3

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

- (a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- (b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- (c) $\det(A) > 0 \Rightarrow A$ è invertibile
- (d) $\det(A \cdot {}^t B) = \det(B \cdot {}^t A)$

Quesito B.3

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni $T \leq V = \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathcal{B}$ base di T .

- (a) Se $\mathcal{B}$ è una base ortogonale allora è anche una base ortonormale.
- (b) Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale allora è anche una base ortogonale.
- (c) I vettori di $\mathcal{B}$ hanno norma maggiore di zero.
- (d) La base $\mathcal{B}$ è costituita da n vettori.

Quesito C.2

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e per ogni λ autovalore di A .

- (a) La molteplicità geometrica di λ è maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.
- (b) La somma della molteplicità algebrica di λ e della sua molteplicità geometrica è uguale a n .
- (c) La molteplicità algebrica di λ è minore o uguale a n
- (d) La molteplicità geometrica di λ è maggiore o uguale a 1

Quesito C.3

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

- (a) A è una matrice ortogonale se e solo se ${}^tAA = I$.
- (b) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base di $\mathbb{R}^n$.
- (c) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$.
- (d) A è una matrice ortogonale se e solo se le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Quesito D.3

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni coppia T e W di sottospazi di $\mathbb{R}^n$ tali che $\forall v \in T$ e $\forall w \in W$ si abbia $v \cdot w = 0$.

- (a) $\dim(T) + \dim(W) = n$
- (b) $\dim(T) + \dim(W) \leq n$
- (c) $\dim(T) + \dim(W) \geq n$
- (d) $\dim(T) = \dim(W)$

Soluzioni

Quesito A.3 (a),(c),(d)

Quesito B.3 (b),(c)

Quesito C.2 (c),(d)

Quesito C.3 (a),(d)

Quesito D.3 (b)

Esercizio A.2

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^4 - 1$

(b) $p(z) = z^4 + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

Esercizio B.2

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado il seguente polinomio:

$$p(z) = z^{12} + z^8 - z^4 - 1$$

Esercizio C.2

Sia $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + bi = z^{2015}$.

Esercizio D.2

Trovare le radici (in $\mathbb{C}$) e decomporre in fattori di primo grado i seguenti polinomi:

(a) $p(z) = z^4 - 1$

(b) $p(z) = z^4 + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Soluzioni

Esercizio A.2

(a) Le radici sono ± 1 e $\pm i$. la decomposizione è $p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$

(b) Occorre risolvere:

$$Z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad (1)$$

Osserviamo che $\left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$ e in particolare vale $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ quindi le soluzioni di (1) avranno la forma $z = e^{\theta i}$ con

$$e^{4\theta i} = e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

quindi

$$4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

da cui ricaviamo le 4 soluzioni $\theta_1 = \frac{1}{6}\pi$, $\theta_2 = \frac{4}{6}\pi$, $\theta_3 = \frac{7}{6}\pi$ e $\theta_4 = \frac{10}{6}\pi$. Quindi le radici sono:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e vale

$$p(z) = \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

Esercizio B.2

$$p(z) = z^8(z^4 + 1) - (z^4 + 1) = (z^8 - 1)(z^4 + 1) = (z^4 - 1)(z^4 + 1)^2$$

le radici di $z^4 - 1 = 0$ sono ∓ 1 e $\mp i$. Per trovare le radici di $z^4 + 1 = 0$ bisogna risolvere $z^4 = -1$, ponendo $z = e^{\theta i}$ si ha: $e^{4\theta i} = e^{\pi i}$ da cui si racava rapidamente $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\theta_3 = \frac{5\pi}{4}$, $\theta_4 = \frac{7\pi}{4}$, quindi

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i) \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

$$p(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(z + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(z + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Esercizio C.2

Prima di tutto osserviamo che vale $|\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)| = 1$ e $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$.

$$z^{2015} = e^{\frac{2015}{3}\pi i} =$$

poiché vale $\frac{2015}{3} = 741 + \frac{2}{3}$ allora si ha

$$z^{2015} = e^{(741 + \frac{2}{3})\pi i} = e^{740\pi i + \pi i + \frac{2}{3}\pi i} = e^{740\pi i} \cdot e^{\pi i} \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

infine poiché

$$e^{740\pi i} = 1 \quad e^{\pi i} = -1 \quad e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

allora si può concludere:

$$z^{2015} = 1 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$$

Esercizio D.2

(a) Le radici sono ± 1 e $\pm i$. la decomposizione è $p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$

(b) Analogamente a quanto visto nell'esercizio A.2.a le radici sono:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

e vale

$$p(z) = \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Esercizio 3

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

sia T lo spazio delle soluzioni e sia $W := T^\perp$. Determinare una base per T , una base per W , un sistema lineare minimale che abbia T come spazio delle soluzioni e un sistema lineare minimale che abbia W come insieme delle soluzioni.

SVOLGIMENTO

Applichiamo il metodo di riduzione di Gauss Jordan alla matrice associata al sistema lineare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ci sono 3 pivot dunque T ha dimensione $4 - 3 = 1$ e W ha dimensione 3. La base per W data da

$$\mathcal{B}_W = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2))$$

Mentre il sistema (2) è già un sistema minimale per T . La riduzione di Gauss-Jordan ci permette di calcolare rapidamente le soluzioni del sistema (2), ci sono 3 pivot sulle prime tre colonne mentre la quarta è libera. Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$T = \{(0, x_4, -2x_4, x_4) | x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, -2, 1) \rangle$$

dunque

$$\mathcal{B}_T = (0, 1, -2, 1)$$

mentre un sistema minimale per W è dato da:

$$\{ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \}$$

Esercizio 4.

Siano T e W i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da:

$$T = \langle (4, 4, 3, 0), (4, 3, 3, 0), (4, -4, 3, 0) \rangle$$

$$W = \langle (3, 3, 4, 0), (3, 4, 4, 0), (3, -3, 4, 0) \rangle.$$

Sia infine A la matrice associata alla proiezione ortogonale sullo spazio T .

- (a) Stabilire se gli spazi T e W sono uguali.
- (b) Trovare una base ortonormale per T .
- (c) Calcolare i coefficienti della matrice A .

SVOLGIMENTO

(a) Appliciamo il metodo di riduzione di Gauss Jordan alla matrice associata ai generatori di T e W .

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici di Gauss-Jordan associate agli spazi vettoriali T e W sono diverse quindi T e W sono sottospazi diversi.

(b) Dalla riduzione di Gauss-Jordan otteniamo che $((1, 0, \frac{3}{4}, 0), (0, 1, 0, 0))$ è una base, osserviamo inoltre che i due vettori $(1, 0, \frac{3}{4}, 0), (0, 1, 0, 0)$ sono già ortogonali quindi per avere una base ortonormale basta renderli di norma 1.

$$\mathcal{B}_T = (v_1, v_2) \quad \text{con } v_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0\right) \text{ e } v_2 = (0, 1, 0, 0)$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \overbrace{\hspace{1cm}}^{v_1} + \begin{pmatrix} v_2 \end{pmatrix} \overbrace{\hspace{1cm}}^{v_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & 0 & \frac{12}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{12}{25} & 0 & \frac{9}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5.

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia A_t la matrice seguente:

$$A_t := \begin{pmatrix} 4-t & 0 & t-2 \\ 2t-4 & t & 2-t \\ 2-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A_t e la loro molteplicità algebrica. (In funzione di t .)
- (b) Per quali valori di t esiste una matrice $H \in GL_3$ tale che posto $D := H^{-1}AH$ si abbia D matrice diagonale?

SVOLGIMENTO Calcoliamo prima di tutti il polinomio caratteristico.

$$p(\lambda) = (t - \lambda)(2 - \lambda)^2$$

Occorre a questo punto distinguere due casi: $t = 2$ e $t \neq 2$.

- (a) Se $t = 2$ c'è un solo autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 3
Se $t \neq 2$ ci sono 2 autovalori: $\lambda_1 = t$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2.
- (b) CASO $t = 2$. Se $t = 2$ allora la matrice A_t diventa:

$$A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

La matrice A_2 è chiaramente diagonalizzabile (è già diagonale).

CASO $t \neq 2$. Riassumendo si ha:

$$\lambda_1 = t, \text{ m.a.}(\lambda_1) = 1$$

$$\lambda_2 = 2, \text{ m.a.}(\lambda_2) = 2$$

chiaramente si ha $\text{m.g.}(\lambda_1) = 1$, vediamo cosa succede per λ_2 . Scriviamo prima di tutto la matrice $A_t - \lambda_2 I$ e riduciamo con Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2-t & 0 & t-2 \\ 2t-4 & t-2 & 2-t \\ 2-t & 0 & t-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di $A_t - \lambda_2 I$ è 2 dunque si ha $\text{m.g.}(\lambda_2)=1$ quindi A_t non è diagonalizzabile per $t \neq 2$

Esercizio 6.

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano π_1 ed π_2 i seguenti piani:

$$\pi_1 = P_1 + T_1 \quad \text{con} \quad P_1 = (1, 0, 1) \text{ e } T_1 = \langle (0, 1, -1), (1, -1, 0) \rangle;$$

$$\pi_2 = P_2 + T_2 \quad \text{con} \quad P_2 = (1, 1, 0) \text{ e } T_2 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

Siano inoltre $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $W_1 = T_1^\perp$ e $W_2 = T_2^\perp$.

- Mostrare che i piani π_1 e π_2 non sono paralleli.
- Trovare una base per W_1 e una per W_2 .
- Determinare delle costanti a, b, c e a', b', c' tali che: T_1 è lo spazio delle soluzioni di $ax+by+cz=0$ e T_2 è lo spazio delle soluzioni di $a'x+b'y+c'z=0$.
- Determinare le equazioni cartesiane per π_1 e π_2 .
- Determinare (se esistono) un punto $P \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $r = P + \langle v \rangle$.
- Determinare il fascio di piani Φ che ha come luogo fisso la retta r .
- Sia $P_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste, un piano π_3 del fascio Φ passante per P_3 .

SVOLGIMENTO

(a) I due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura, applicando Gauss-Jordan ai generatori di T_1 e T_2 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque T_1 e T_2 non sono uguali e quindi π_1 e π_2 non sono paralleli.

(b) Possiamo ottenere un sistema di equazioni per W_1 e W_2 utilizzando i generatori di T_1 e T_2 . La cosa più conveniente è di utilizzare le basi ottenute con Gauss-Jordan al punto (a) in modo da avere il sistema già a scalini. I sistemi ottenuti sono

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

dai quali otteniamo:

$$W_1 = \{(z, z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$W_2 = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

quindi

$$\mathcal{B}_{W_1} = \{(1, 1, 1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{W_2} = \{(0, 0, 1)\}$$

(c) Questa parte è simile a quanto fatto nell'esercizio 3.

Per T_1 si ha $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ e quindi $x + y + z = 0$.

Per T_2 si ha $(a', b', c') = (0, 0, 1)$ e quindi $z = 0$.

(d) Le equazioni per π_1 e π_2 sono del tipo $x + y + z = d$ e $z = d'$. Poiché sappiamo che P_1 e P_2 devono appartenere rispettivamente ai piani π_1 e π_2 allora per calcolare d e d' basta sostituire le coordinate di P_1 nella prima equazione e quelle di P_2 nella seconda equazione. Sostituendo otteniamo:

$$x + y + z = 2 \quad \text{e} \quad z = 0$$

(e) Poiché r è l'intersezione dei due piani, per trovare r basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$r = \{(-y + 2, y, 0) | y \in \mathbb{R}\} = (2, 0, 0) + \langle(-1, 1, 0)\rangle$$

(f) Il fascio di piani Φ è ottenuto ponendo uguali a zero le combinazioni lineari delle due equazioni di r : $x + y + z - 2 = 0$ e $z = 0$.

$$\alpha \cdot (x + y + z - 2) + \beta \cdot z = 0 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ non entrambi nulli.}$$

(g) Basta sostituire le coordinate del punto P_3 nel fascio di rette ottenuto al punto (f) e ricavare dei valori di α e β che soddisfano l'equazione ottenuta. (Attenzione i valori di α e β non possono essere entrambi nulli e non sono unici)

$$\alpha \cdot (1 + 1 + 1 - 2) + \beta \cdot 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha + \beta = 0$$

Per esempio scegliendo $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ si ottiene il piano di equazione:

$$x + y - 2 = 0 .$$