

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari A

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punti.)

Per quali valori di a e b in $\mathbb{R}$ il numero complesso $z := a + bi$ è invertibile? Esprimere l'inverso di z in funzione di a e b ,

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni W_1, W_2 sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^4$.

- (a) Se $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$ allora $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$
- (b) Se $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$ allora $\dim(W_1 + W_2) \leq 2$
- (c) Se $W_1 + W_2 = V$ allora $\dim(W_1) + \dim(W_2) = 4$
- (d) Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ allora $\dim(W_1) + \dim(W_2) \leq 4$

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice ortogonale $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$.

- (a) $|\det(A)| = 1$
- (b) AA è una matrice simmetrica.
- (c) AA è una matrice invertibile.
- (d) AA è una matrice ortogonale.

Esercizio 1. [Disuguaglianza triangolare] (V. 3 punti.)

Dimostrare che

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \text{vale} \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Esercizio 2. (V. 3 punti.)

Determinare le radici di $z^4 + 7 - 24i = 0$ sapendo che una delle radici è $z_1 = 2 + i$

Esercizio 3. (V. 4 punti.)

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y + (|t| - t)(z + 1) &= 0 \\ x - y &= 1 + t - |t| \\ y - x + (|t| + t)z &= |t| \end{cases}$$

Esercizio 4. (V. 8 punti.)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}_1$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1)$ e $w_3 = (2, 1, 1)$ e sia $\mathcal{B}_2$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 1)$, e $v_2 = (1, -1)$. Sia infine

$$A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

(a) Calcolare i coefficienti della matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche.

(b) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $g(v_1) = w_1$ e $g(v_2) = w_3$? E' unica? Se esiste ed è unica calcolare i coefficienti della matrice associata a g rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x, x - z)$$

determinare se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f .

Esercizio 6. (V. 8 punti.)

Siano P_1 e P_2 due punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sia v un vettore di $\mathbb{R}^3$, sia $T := \langle v \rangle$ e $W := T^\perp$. Consideriamo inoltre in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta $r = P_1 + \langle v \rangle$ e il piano $\pi = P_2 + W$ sia infine P_3 il punto di intersezione tra il piano π e la retta r . Assumiamo che P_1 , P_2 e v siano dati:

$$P_1 = (2, -3, -1) \quad P_2 = (5, -3, 5) \quad v = (-1, 2, 2)$$

- (a) Determinare un sistema lineare minimale per W .
- (b) Trovare una base per W .
- (c) Determinare un sistema lineare minimale per T .
- (d) Determinare un'equazione per il piano π .
- (e) Determinare un sistema lineare di equazioni minimali per la retta r .
- (f) Calcolare le coordinate del punto P_3 .
- (g) Calcolare la distanza tra il punto P_2 e la retta r .
- (h) Calcolare la distanza tra il punto P_1 e il piano π .

