

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Quesiti preliminari B

Rispondere ad almeno 2 dei quesiti seguenti. Qualora non si risponda in maniera corretta ad almeno 2 dei quesiti, il compito verrà considerato insufficiente (e non verrà corretto il resto dell'elaborato).

Quesito 1. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni W_1, W_2 sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^4$.

- (a) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$
- (b) Se $\dim(W_1) > 0$ allora $\dim(W_1 + W_2) > 0$
- (c) Se $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 3$ allora $\dim(W_1 + W_2) = 3$
- (d) Se $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 3$ allora $\dim(W_1 \cap W_2) \geq 2$

Quesito 2. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$.

- (a) Se la matrice A ha due colonne uguali allora $\det(A) \neq 0$.
- (b) Se la matrice A ha n colonne distinte e non nulle allora $\det(A) \neq 0$.
- (c) Se le righe di A sono linearmente indipendenti allora $\det(A) \neq 0$.
- (d) Se l'applicazione lineare associata ad A è bigettiva allora $\det(A) \neq 0$

Quesito 3. (V. 1 punto.)

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

- (a) Il rango di A è uguale al massimo numero di righe di A linearmente indipendenti.
- (b) Il rango di A è uguale al massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti.
- (c) Il rango di A è uguale alla dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare associata ad A .
- (d) Il rango di A è uguale alla dimensione del nucleo dell'applicazione lineare associata ad A .

Esercizio 1. (V. 3 punti.)

Sia A una matrice simmetrica di lato n a coefficienti reali. Dimostrare che se v_1 e v_2 sono due autovettori corrispondenti a due autovalori λ_1 e λ_2 distinti allora vale:

$$\overbrace{v_1} \left(\begin{matrix} v_2 \end{matrix} \right) = 0$$

Esercizio 2. (V. 3 punti.)

Determinare le radici di $z^4 + 7 + 24i = 0$ sapendo che una delle radici è $z_1 = 2 - i$

Esercizio 3. (V. 4 punti.)

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + (t + |t|)(z + 1) &= 0 \\ y - x &= 1 - t - |t| \\ x - y + (|t| - t)z &= |t| \end{cases}$$

Esercizio 4. (V. 8 punti.)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}_1$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 0, -1)$ e $w_3 = (2, 1, -1)$ e sia $\mathcal{B}_2$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, -1)$, e $v_2 = (1, 1)$. Sia infine

$$A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

(a) Calcolare i coefficienti della matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche.

(b) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $g(v_1) = w_1$ e $g(v_2) = w_3$? E' unica? Se esiste ed è unica calcolare i coefficienti della matrice associata a g rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 5. (V. 4 punti.)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x, y - z)$$

determinare se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f .

Esercizio 6. (V. 8 punti.)

Siano P_1 e P_2 due punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sia v un vettore di $\mathbb{R}^3$, sia $T := \langle v \rangle$ e $W := T^\perp$. Consideriamo inoltre in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta $r = P_1 + \langle v \rangle$ e il piano $\pi = P_2 + W$ sia infine P_3 il punto di intersezione tra il piano π e la retta r . Assumiamo che P_1 , P_2 e v siano dati:

$$P_1 = (5, -3, 5) \quad P_2 = (2, -3, -1) \quad v = (2, -1, 2)$$

- (a) Determinare un sistema lineare minimale per W .
- (b) Trovare una base per W .
- (c) Determinare un sistema lineare minimale per T .
- (d) Determinare un'equazione per il piano π .
- (e) Determinare un sistema lineare di equazioni minimali per la retta r .
- (f) Calcolare le coordinate del punto P_3 .
- (g) Calcolare la distanza tra il punto P_2 e la retta r .
- (h) Calcolare la distanza tra il punto P_1 e il piano π .

