Prova d'esame di

Fondamenti di algebra lineare e geometria (mat.disp.)

Laurea Triennale in Ingegneria dell'energia

17/09/2015

SOLUZIONI

Per gli esercizi 2, 3, 4, 5 e 6 è riportata la soluzione della sola traccia A.

Quesiti preliminari vero o falso.

Quesito A.1.

Per quali valori di a e b in $\mathbb{R}$ il numero complesso $z := a + bi$ è invertibile? Esprimere l'inverso di z in funzione di a e b,

Quesito A.2

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni W_1, W_2 sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^4$.

(a) Se $dim(W_1) = dim(W_2) = 1$ allora $dim(W_1 \cap W_2) = 1$

(b) Se $dim(W_1) = dim(W_2) = 1$ allora $dim(W_1 + W_2) \leq 2$

(c) Se $W_1 + W_2 = V$ allora $dim(W_1) + dim(W_2) = 4$

(d) Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ allora $dim(W_1) + dim(W_2) \leq 4$

Quesito A.3

Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice ortogonale $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$.

(a) $|det(A)| = 1$

(b) AA è una matrice simmetrica.

(c) AA è una matrice invertibile.

(d) AA è una matrice ortogonale.

Soluzioni

Esercizio A.1. Il numero complesso $z = a + bi$ è invertibile se e solo se $a^2 + b^2 \neq 0$. L'inverso è data da: $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

Esercizio A.2. Risposte vere: (b) e (d).

Esercizio A.3. Risposte vere: (a), (c) e (d).

Quesito B.1
Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni $W_1,\ W_2$ sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^4$.

(a) $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2)$

(b) Se $dim(W_1) > 0$ allora $dim(W_1 + W_2) > 0$

(c) Se $dim(W_1) = dim(W_2) = 3$ allora $dim(W_1 + W_2) = 3$

(d) Se $dim(W_1) = dim(W_2) = 3$ allora $dim(W_1 \cap W_2) \geq 2$

Quesito B.2
Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$.

(a) Se la matrice A ha due colonne uguali allora $det(A) \neq 0$.

(b) Se la matrice A ha n colonne distinte e non nulle allora $det(A) \neq 0$.

(c) Se le righe di A sono linearmente indipendenti allora $det(A) \neq 0$.

(d) Se l'applicazione lineare associata ad A è bigettiva allora. $det(A) \neq 0$

Esercizio B.3
Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

(a) Il rango di A è uguale al massimo numero di righe di A linearmente indipendenti.

(b) Il rango di A è uguale al massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti.

(c) Il rango di A è uguale alla dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare associata ad A.

(d) Il rango di A è uguale alla dimensione del nucleo dell'applicazione lineare associata ad A.

Soluzioni
Esercizio B.1. Risposte vere: (b) e (d).
Esercizio B.2. Risposte vere: (c) e (d).
Esercizio B.3. Risposte vere: (a), (b) e (c).

Esercizio 2.
Determinare le radici di $z^4 + 7 - 24i = 0$ sapendo che una delle radici è $z_1 = 2 + i$

Soluzione

Bisogno risolvere l'equazione

$$z^4 = -7 + 24i$$

sapendo che $z_1 = 2 + i$ è una soluzione ovvero sappiamo che $z_1^4 = -7 + 24i$.
Sappiamo che le radici quarte dell'unità sono $\{1, -1, i, -1\}$ cioè vale
$1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = 1$. Dunque

$$(1 \cdot z_1)^4 = (-1 \cdot z_1)^4 = (i \cdot z_1)^4 = (\,-\,i \cdot z_1)^4 = -7 + 24i$$

quindi le soluzione dell'equazione $z^4 = -7 + 24i$ sono:
$z_1 = 1 \cdot (2 + i) = 2 + i$
$z_2 = -1 \cdot (2 + i) = -2 - i$
$z_3 = i \cdot (2 + i) = -1 + 2i$
$z_4 = -i \cdot (2 + i) = 1 - 2i$

Esercizio 3.
Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y + (|t| - t)(z+1) & = & 0 \\ x - y & = & 1 + t - |t| \\ y - x + (|t| + t)z & = & |t| \end{cases}$$

Soluzione
Scriviamo la matrice associata al sistema e proviamo a ridurre con il metodo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & |t| - t & t - |t| \\ 1 & -1 & 0 & 1 + t - |t| \\ -1 & 1 & t + |t| & |t| \end{array}\right) \xrightarrow{Gauss-Jordan} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & |t| - t & 1 + 2t - 2|t| \\ 0 & 1 & |t| - t & t - |t| \\ 0 & 0 & t + |t| & 1 + t \end{array}\right)$$

(E' possibile che effettuando la riduzione in maniera diversa si ottengano dei valori diversi nelle prime due posizione della terza e quarta colonna, ciò non dovrebbe modificare la discussione che segue.) Analizziamo la matrice ottenuta, ci sono sicuramente due pivot sulle prime due colonne, mentre per il terzo pivot bisogna capire cosa succede a $t + |t|$.
Il caso $t = 0$ è molto semplice e conviene farlo separatamente. Sostituendo $t = 0$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

quindi essendoci un pivot sulla colonna dei termini noti, il sistema non ha soluzione.
Caso $t > 0$. Se $t > 0$ allora $|t| = t$ e dunque la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2t & 1 + t \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Poiché } t > 0 \text{ possiamo dividere per } 2t]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+t}{2t} \end{array}\right)$$

dunque per $t > 0$ la soluzione è unica e si ha $x = 1,\ y = 0,\ z = \frac{1+t}{2t}$.
Caso $t < 0$. Se vale $t < 0$ allora $t = -|t|$ ovvero $|t| = -t$ sostituendo si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2t & 1 + 4t \\ 0 & 1 & -2t & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 + t \end{array}\right)$$

Si distinguono due casi se $t = -1$ allora $1 + t = 0$ e ci sono infinite soluzioni mentre se t è negativo ma diverso da -1 allora non ci sono soluzioni.
Caso $t = -1$, sostituendo si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -2z - 3 \\ y = -2z - 2 \end{cases} \qquad S_{t=-1} = \{(-2z - 3, -2z - 2, z) | z \in \mathbb{R})\}$$

Esercizio 4.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}_1$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori nell'ordine $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1)$ e $w_3 = (2, 1, 1)$ e sia $\mathcal{B}_2$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori nell'ordine $v_1 = (1, 1)$, e $v_2 = (1, -1)$. Sia infine

$$A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.
(a) Calcolare i coefficienti della matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche.
(b) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(v_1) = w_1$ e $g(v_2) = w_3$? E' unica? Se esiste ed è unica calcolare i coefficienti della matrice associata a g rispetto alle basi cononiche.
Soluzione
(a) Siano B_1 e B_2 le matrici associate alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice cercata è data da:

$$A = B_2 \cdot A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Detoniamo con $C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ la matrice associata a g rispetto alle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1$ e denotiamo con C la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche. La prima matrice è data dalle ipotesi:

$$C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre C puìo essere ricavata come nel quesito precedente

$$C = B_1 \cdot C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \cdot B_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Un altro modo per risolvere l'esercizio poteva essere quello di scrivere la matrice associata alle equazioni: $g(1, 1) = (1, 0, 0)$ e $g(1, -1) = (2, 1, 1)$ e poi ridurre con il metodo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Gauss-Jordan} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

e quindi

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 5.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x, x - z)$$

determinare se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.
Soluzione
La matrice A associata ad f è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Procedendo come al solito calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

dunque ci sono due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. L'autovalore λ_1 ha molteplicità algebrica 2. Per sapere se f ammette una base di autovettori occorre calcolare la molteplicità geometrica di λ_1.

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il Rango di $A - \lambda_1 I$ è 2 dunque la molteplicità geometrica di λ_1 è 1 e la funzione f non ammette una base di autovettori.

Esercizio 6. (V. 8 punti.)
Siano P_1 e P_2 due punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sia v un vettore di $\mathbb{R}^3$, sia $T := \langle v \rangle$ e $W := T^\perp$. Consideriamo inoltre in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta $r = P_1 + \langle v \rangle$ e il piano $\pi = P_2 + W$ sia infine P_3 il punto di intersezione tra il piano π e la retta r.
Assumiamo che P_1, P_2 e v siano dati:

$$P_1 = (2, -3, -1) \qquad P_2 = (5, -3, 5) \qquad v = (-1, 2, 2)$$

(a) Determinare un sistema lineare minimale per W.
(b) Trovare una base per W.
(c) Determinare un sistema lineare minimale per T.
(d) Determinare un'equazione per il piano π.
(e) Determinare un sistema lineare di equazioni minimali per la retta r.
(f) Calcolare le coordinate del punto P_3.
(g) Calcolare la distanza tra il punto P_2 e la retta r.
(h) Calcolare la distanza tra il punto P_1 e il piano π.
Soluzione
$\mathcal{B}_T = \{(-1, 2, 2)\}$
(a) $W: \qquad -x + 2y + 2z = 0$
(b) Da (a) si ricava $x = 2y + 2z$ e dunque $W = \{(2y + 2z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{B}_W = \{(2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$
(c) $T: \qquad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$
(d) $\pi: \qquad -x + 2y + 2z = -1$
(e) $r: \qquad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$
(f) risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$ si ottiene $P_3 = (1, -1, 1)$
(g) $\|P_2 - P_3\| = 6$
(h) $\|P_1 - P_3\| = 3$